Combinatoria

Susana Puddu

Ejemplo 1. Dados dos conjuntos A y B, donde A tiene k elementos y B tiene m elementos, queremos determinar cuántos elementos tiene $A \times B$. Recordemos que $A \times B$ es el conjunto de pares ordenados cuya primera coordenada es un elemento de A y cuya segunda coordenada es un elemento de B. Entonces, la primera coordenada puede tomar k valores y, para cada uno de ellos, la segunda coordenada puede tomar m valores: si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ entonces hay m pares con primera coordenada a_1, que son $(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m)$, hay m pares con primera coordenada a_2, que son $(a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_m)$, ..., hay m pares con primera coordenada a_k, que son $(a_k, b_1), (a_k, b_2), \dots, (a_k, b_m)$. Por lo tanto, $A \times B$ tiene $\underbrace{m + m + \cdots + m}_{k \text{ sumandos}} = k.m$ elementos.

Si A es un conjunto finito denotaremos por $\#A$ a la cantidad de elementos que tiene A.

Ejemplo 2. Dados los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, donde $\#A_i = k_i$ $(1 \le i \le n)$, ¿cuántos elementos tiene $A_1 \times A_2 \times \dots A_n$?
Como A_1 tiene k_1 elementos y A_2 tiene k_2 elementos entonces, por lo visto en el ejemplo 1. resulta que $A_1 \times A_2$ tiene $k_1.k_2$ elementos. Como $A_1 \times A_2$ tiene $k_1.k_2$ elementos y A_3 tiene k_3 elementos entonces $A_1 \times A_2 \times A_3$ tiene $k_1.k_2.k_3$ elementos. En general, $A_1 \times A_2 \times \dots A_n$ tiene $k_1.k_2. \dots .k_n$ elementos.

Ejemplo 3. i) Si A es un conjunto de n elementos y B es un conjunto de k elementos, ¿cuántas funciones de A en B se pueden definir?
Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ entonces cada función $\varphi : A \longrightarrow B$ queda determinada por los valores que toma en $a_1, \dots, a_n$, es decir, φ queda determinada por la n-upla

$$(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n)) \in B \times B \times \dots \times B$$

Luego, pueden definirse tantas funciones de A en B como elementos haya en $\underbrace{B \times \dots \times B}_{n \text{ factores}}$.

Luego, la cantidad de funciones es

$$\underbrace{\#B \times \dots \times \#B}_{n \text{ factores}} = \underbrace{k \times \dots \times k}_{n \text{ factores}} = k^n$$

ii) ¿De cuántas maneras se pueden ubicar n bolitas numeradas en k cajas numeradas?
Notemos que esto es lo mismo que determinar cuántas funciones hay de $A = \{1, 2, \dots, n\}$ en $B = \{1, 2, \dots, k\}$ ya que cada ubicación de las bolitas en las cajas puede verse como la función definida por $f(i) =$ número de caja donde está ubicada la bolita i. Luego, hay k^n maneras de ubicar las bolitas.

Ejemplo 4. i) Si A es un conjunto de n elementos y B es un conjunto de m elementos, ¿cuántas funciones inyectivas de A en B se pueden definir?
Es claro que si $n > m$ entonces no se puede definir ninguna función inyectiva de A en B. Por lo tanto supondremos que $n \leq m$.
Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, las funciones inyectivas $\varphi : A \longrightarrow B$ quedan determinadas por las n-uplas $(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)) \in B \times B \times \ldots \times B$ que tienen todas sus coordenadas distintas.
Como la primera coordenada puede tomar m valores, la segunda puede tomar $m-1$ valores, la tercera $m-2$, etc. y hay n coordenadas, entonces la cantidad de funciones inyectivas es

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1)) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

ii) Sea $n \leq m$. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar n bolitas numeradas en m cajas numeradas de manera que haya a lo sumo una bolita por caja?
Esto es lo mismo que determinar cuántas funciones inyectivas hay de $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ en $B = \{1, 2, \ldots, k\}$ ya que cada ubicación de las bolitas en las cajas puede verse como la función definida por $f(i) =$ número de caja donde está ubicada la bolita i y que en cada caja haya a lo sumo una bolita significa que $f(i) \neq f(j)$ para todo $i \neq j$, es decir, que f sea inyectiva. Luego, hay $\frac{m!}{(m-n)!}$ maneras de ubicar las bolitas.

Ejemplo 5. Si A y B son conjuntos finitos, $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$. Luego, si A y B son disjuntos entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B$

Ejercicio. Probar por inducción que si $A_1, A_2, \ldots A_n$ son conjuntos finitos disjuntos dos a dos, es decir, tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i$

Ejemplo 6. ¿Cuántas funciones $\varphi : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ hay que verifiquen
i) $\varphi(2) = 10$ y $\varphi(3) = 1$?
ii) $\varphi(2) = \varphi(6)$?
iii) $\varphi(3) > \varphi(2)$?
iv) φ es inyectiva, $\varphi(2) = 10$ y $\varphi(3) = 1$?

i) Las funciones $\varphi : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ tales que $\varphi(2) = 10$ y $\varphi(3) = 1$ quedan determinadas por las 6-uplas de la forma $(\varphi(1), 10, 1, \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6))$. Como la primera coordenada puede tomar 11 valores, la segunda 1 valor, la tercera 1, la cuarta 11, la quinta 11 y la sexta 11 entonces hay en total 11^4 funciones que satisfacen lo pedido.

ii) Ahora las cinco primeras coordenadas pueden tomar 11 valores y la última uno solo (el valor que tiene $\varphi(2)$). Luego hay 11^5 funciones que satisfacen $\varphi(2) = \varphi(6)$.

iii) Sea $U = \{\varphi : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 11\} \,/\, \varphi(3) > \varphi(2)\}$. Queremos determinar $\#U$. Haremos esto de dos maneras distintas.

Primera forma: Consideremos los subconjuntos de U

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{\varphi : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,\dots,11\} \,/\, \varphi(2)=1 \text{ y } \varphi(3)>1\}\\
U_2 &= \{\varphi : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,\dots,11\} \,/\, \varphi(2)=2 \text{ y } \varphi(3)>2\}\\
U_3 &= \{\varphi : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,\dots,11\} \,/\, \varphi(2)=3 \text{ y } \varphi(3)>3\}\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
U_{10} &= \{\varphi : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,\dots,11\} \,/\, \varphi(2)=10 \text{ y } \varphi(3)>10\}\\
U_{11} &= \{\varphi : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,\dots,11\} \,/\, \varphi(2)=11 \text{ y } \varphi(3)>11\}
\end{aligned}$$

Como estos conjuntos son disjuntos dos a dos y su unión es U entonces

$$\#U = \#U_1 + \#U_2 + \#U_3 + \cdots + \#U_{10} + \#U_{11}$$

Los elementos de U_1 quedan determinados por las 6-uplas $(\varphi(1), 1, \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6))$ tales que $\varphi(3) > 1$. La primera coordenada puede tomar 11 valores, la segunda 1, la tercera 10, la cuarta 11, la quinta 11 y la sexta 11. Luego $\#U_1 = 10.11^4$.
Los elementos de U_2 quedan determinados por las 6-uplas $(\varphi(1), 2, \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6))$ tales que $\varphi(3) > 2$. La primera coordenada puede tomar 11 valores, la segunda 1, la tercera 9, la cuarta 11, la quinta 11 y la sexta 11. Luego $\#U_2 = 9.11^4$.
Los elementos de U_3 quedan determinados por las 6-uplas $(\varphi(1), 3, \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6))$ tales que $\varphi(3) > 3$. La primera coordenada puede tomar 11 valores, la segunda 1, la tercera 8, la cuarta 11, la quinta 11 y la sexta 11. Luego $\#U_3 = 8.11^4$.
Los elementos de U_{10} quedan determinados por las 6-uplas $(\varphi(1), 10, \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6))$ tales que $\varphi(3) > 10$. La primera coordenada puede tomar 11 valores, la segunda 1, la tercera 1, la cuarta 11, la quinta 11 y la sexta 11. Luego $\#U_{10} = 11^4$.
Finalmente, $\#U_{11} = 0$ pues $U_{11} = \emptyset$.
Luego,

$$\#U = \#U_1 + \#U_2 + \#U_3 + \cdots + \#U_{10} + \#U_{11} = (10+9+8+\cdots+1).11^4 = 55.11^4 = 5.11^5$$

Segunda forma: Sean

$$\begin{aligned}
U &= \{\varphi : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,\dots,11\} \,/\, \varphi(3) > \varphi(2)\}\\
V &= \{\varphi : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,\dots,11\} \,/\, \varphi(3) < \varphi(2)\}\\
W &= \{\varphi : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,\dots,11\} \,/\, \varphi(3) = \varphi(2)\}
\end{aligned}$$

Entonces $U \cup V \cup W$ es igual al conjunto de todas las funciones φ de $\{1,2,3,4,5,6\}$ en $\{1,2,3,\dots,11\}$. Luego, $\#(U \cup V \cup W) = 11^6$ y como U, V y W son disjuntos dos a dos, entonces $\#(U \cup V \cup W) = \#U + \#V + \#W$. Por lo tanto, $\#U + \#V + \#W = 11^6$. Ahora, observando que $\#W = 11^5$ y que $\#U = \#V$, resulta que $11^6 = 2\#U + 11^5$, de donde

$$\#U = \frac{11^6 - 11^5}{2} = \frac{(11-1).11^5}{2} = 5.11^5$$

iv) Las funciones $\varphi : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,\ldots,11\}$ tales que φ es inyectiva, $\varphi(2) = 10$ y $\varphi(3) = 1$ quedan determinadas por las 6-uplas de la forma $(\varphi(1), 10, 1, \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6))$ que tienen todas sus coordenadas distintas. La primera coordenada puede tomar $11-2 = 9$ valores (cualquiera de los números entre 1 y 11 menos 10 y 1). Ahora, la cuarta coordenada puede tomar 8 valores (cualquiera menos 10, 1 y el valor que tiene la primera coordenada), la quinta puede tomar 7 valores y la sexta 6. Luego, hay 9.8.7.6 funciones que satisfacen lo pedido. Otra manera de calcular esto es notar que es lo mismo que determinar la cantidad de funciones inyectivas $\varphi : \{1,4,5,6\} \longrightarrow \{2,3,\ldots,9,11\}$, es decir, la cantidad de funciones inyectivas de un conjunto de 4 elementos en un conjunto de 9 elementos, que es

$$\frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9.8.7.6$$

Ejemplo 7. Sea A un conjunto de n elementos. ¿Cuantas funciones biyectivas $f : A \longrightarrow A$ se pueden definir?
Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, entonces $f(a_1)$ puede tomar n valores, $f(a_2)$ puede tomar $n-1$ valores (cualquiera de los n elementos de A menos el valor que tomó $f(a_1)$), $f(a_3)$ puede tomar $n-2$ valores, ..., $f(a_{n-1})$ puede tomar 2 valores y $f(a_n)$ sólo uno. Luego, hay $n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!$ funciones biyectivas de A en A.

Si A es un conjunto de n elementos llamaremos *permutaciones* a las funciones biyectivas de A en A.

Ejemplo 8. ¿De cuántas maneras podemos ubicar 17 personas en 25 asientos numerados?
La primera persona se puede ubicar en cualquiera de los 25 asientos, la segunda en 24, la tercera en 23, etc, la última en 9. Luego, la cantidad de maneras es $25.24.\ldots.10.9$.
Otra forma de ver esto es pensar que cada asignación de los asientos a las personas es una función del conjunto de personas en el conjunto de asientos ($\varphi(k)$ es el número de asiento que le asignamos a la persona k) y que esta función debe ser inyectiva pues cada asiento debe ser asignado a una sola persona. Luego, la cantidad de maneras es

$$\frac{25!}{(25-17)!} = \frac{25!}{8!} = 25.24.\ldots.10.9$$

Ejemplo 9. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1,2,4,6,9?
Cada una de las cuatro cifras puede tomar 5 valores. Luego, hay 5^4 números.

Ejemplo 10. ¿Cuántos números se pueden obtener permutando los dígitos del número 53871?
La diferencia con el ejemplo anterior es que en este caso las cifras son cinco y no se pueden repetir. Ahora la primera cifra puede tomar 5 valores, la segunda 4, la tercera 3, la cuarta 2 y la quinta 1. Hay entonces 5! números.

Ejemplo 11. ¿De cuántas maneras podemos elegir k asientos de un conjunto n asientos numerados $(0 \leq k \leq n)$?

Supongamos que la respuesta sea x. Calcularemos cuánto vale x resolviendo de dos maneras distintas el problema:
¿De cuántas maneras podemos ubicar k personas en n asientos numerados $(0 \leq k \leq n)$?

Por un lado, procediendo como en el ejemplo 8., llegamos a la conclusión de que la respuesta es $\frac{n!}{(n-k)!}$. Pero por otro lado, para ubicar k personas en n asientos numerados basta elegir k de los n asientos y, para cada una de esas elecciones, ubicar las k personas en los k asientos elegidos. Luego, la respuesta es $x.\frac{k!}{(k-k)!} = x.k!$
Por lo tanto resulta que $\frac{n!}{(n-k)!} = x.k!$ de donde obtenemos que

$$x = \frac{n!}{k!.(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Conclusión: La cantidad de maneras en que podemos elegir k objetos de un conjunto de n objetos es $\binom{n}{k}$, es decir, un conjunto de n elementos tiene $\binom{n}{k}$ subconjuntos de k elementos.

Ejemplo 12. ¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de n elementos?
Por lo anterior, un conjunto de n elementos tiene $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ subconjuntos (los subconjuntos de 0 elementos, los de 1 elemento, los de dos elementos, etc.). Calculemos esto de otra manera. Si $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ determinemos todos los subconjuntos de A usando las 3-uplas de ceros y unos: si la primera coordenada es 0 entonces el subconjunto no contiene a a_1 y si es 1 entonces sí continene a a_1, y lo mismo para las otras dos coordenadas

$$\begin{array}{ccc}
(0,0,0) & \longleftrightarrow & \emptyset \\
(1,0,0) & \longleftrightarrow & \{a_1\} \\
(0,1,0) & \longleftrightarrow & \{a_2\} \\
(0,0,1) & \longleftrightarrow & \{a_3\} \\
(1,1,0) & \longleftrightarrow & \{a_1, a_2\} \\
(1,0,1) & \longleftrightarrow & \{a_1, a_3\} \\
(0,1,1) & \longleftrightarrow & \{a_2, a_3\} \\
(1,1,1) & \longleftrightarrow & \{a_1, a_2, a_3\}
\end{array}$$

Luego, hay tantos subconjuntos de A como 3-uplas de ceros y unos. Como cada coordenada puede tomar 2 valores y hay 3 coordenadas, entonces A tiene 2^3 subconjuntos. En general, un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos. Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Ejemplo 13. (Binomio de Newton) Calculemos $(a+b)^n$.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b).(a+b).(a+b).\dots.(a+b)}_{n \text{ factores}}$$

Cuando calculamos el segundo miembro utilizando la propiedad distributiva, lo que hacemos es calcular la suma de todos los productos de la forma $x_1.x_2.\dots.x_n$, donde cada x_i es igual a a o b. Obtenemos todos los términos de la forma $a^k b^{n-k}$ cuando k de los n factores x_i valen a y los restantes b. Luego, hay $\binom{n}{k}$ factores de la forma $a^k b^{n-k}$.
Por lo tanto

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ejemplo 14. En una granja trabajan 140 personas. De cuántas maneras se pueden elegir dos grupos A y B de trabajadores que satisfagan: el grupo A debe tener 6 integrantes que se destinarán a ordeñar vacas, el grupo B debe tener 22 integrantes que se dedicarán a la siembra de trigo y una misma persona no puede integrar ambos grupos.

Hay $\binom{140}{6}$ posibles grupos A y para cada uno de ellos hay $\binom{134}{22}$ posibles grupos B (de las $140-6=134$ personas que no integran el grupo A elegimos 22 para integrar el grupo B). Luego, en total hay $\binom{140}{6}\binom{134}{22}$ formas de elegir los dos grupos.

Notemos que el mismo problema puede resolverse eligiendo primero los integrantes del grupo B y luego los del grupo A . En este caso tenemos que la cantidad de maneras de elegir los dos grupos es $\binom{140}{22}\binom{118}{6}$. Dejamos como ejercicio verificar que

$$\binom{140}{22}\binom{118}{6} = \binom{140}{6}\binom{134}{22}$$

Ejemplo 15. ¿Cuántas "palabras" (anagramas) se pueden formar permutando las letras de

i) COCOTERO?

Debemos ubicar dos letras C, tres O, una T, una E y una R en 8 lugares. De los 8 lugares elegimos 2 para las C, de los 6 lugares que quedan elegimos 3 para las O, de los 3 lugares restantes elegimos 1 para la T, de los 2 que quedan elegimos 1 para la E y finalmente ubicamos la R en el único lugar que queda. Luego, la cantidad de palabras es

$$\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{1}\binom{2}{1} = \frac{8!}{2!.6!}\frac{6!}{3!.3!}\frac{3!}{1!.2!}\frac{2!}{1!.1!} = \frac{8!}{2!.3!}$$

ii) APARENTEMENTE?

Dejamos como ejercicio verificar que la cantidad de palabras es

$$\frac{13!}{2!.4!.2!.2!}$$

iii) Dado un conjunto de 15 diplomáticos, queremos seleccionar uno para enviar a Austria, dos para enviar a Brasil, dos para Colombia, dos para Dinamarca, dos para EEUU, tres para Finlandia y tres para Grecia. ¿De cuántas maneras podemos hacer esto?

De los 15 diplomáticos debemos elegir uno para Austria, de los 14 restantes dos para Brasil, de los 12 que quedan dos para Colombia, de los 10 restantes dos para Dinamarca, de los 8 que quedan dos para EEUU, de los 6 restantes 3 para Finlandia y los tres que quedan irán a Grecia. Luego, la cantidad de maneras en que podemos hacer esto es

$$\binom{15}{1}\binom{14}{2}\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3} = \frac{15!}{2!.2!.2!.2!.3!.3!}$$

Notar que esto es lo mismo que determinar la cantidad de anagramas que se pueden formar con las letras de de ABBCCDDEEFFFGGG

Ejemplo 16. i) ¿Cuántas palabras se pueden formar permutando las letras de ARBOLES con la condición de que las vocales deben estar juntas?
Esto es lo mismo que hallar las permutaciones de VRBLS y luego reemplazar V en cada una por una permutación de AOE. Luego, hay 5!.3! palabras que satisfacen lo pedido.

ii) Idem i) para la palabra ELECTROCARDIOGRAMA
Como antes, esto es hallar las permutaciones de VLCTRCRDGRM y luego reemplazar V en cada una por una permutación de EEIOOAAA. Luego, la cantidad de palabras es

$$\frac{11!}{2!.3!}\frac{8!}{2!.2!.3!}$$

Ejemplo 17. ¿Cuántos números mayores o iguales que 1237 y menores o iguales que 3837 se pueden formar con los dígitos 1, 3, 6, 8, 9 (se pueden repetir dígitos).
Debemos ubicar los dígitos 1, 3, 6, 8, 9 en 4 lugares de manera que el número formado esté entre 1237 y 3837. Luego, en el primer lugar sólo podemos poner un 1 o un 3.
Los que empiezan con 1 no pueden tener un 1 en el segundo lugar. Luego, en el primer lugar hay un 1, el segundo lugar puede tomar 4 valores (3, 6, 8 o 9) y el tercer y cuarto lugares pueden tomar 5 valores cada uno. Luego hay 4.5.5 números que empiezan con 1 y satisfacen lo pedido.
Veamos cuántos empiezan con 3. En el segundo lugar no puede haber un 9. Si en el segundo lugar hay un 1, un 3 o un 6, los restantes dos lugares pueden tomar 5 valores (1, 3, 6, 8, 9) cada uno (estos son 3.5.5 números). Pero si en el segundo lugar hay un 8 entonces el tercer lugar puede tener un 1, en cuyo caso el último lugar puede tomar 5 valores, o un 3 en cuyo caso el último lugar puede tomar sólo 3 valores (1, 3, 6). En resumen, la cantidad de números que empiezan con 3 y satisfacen lo pedido es $3.5^2 + 5 + 3$.

Por lo tanto con los dígitos 1, 3, 6, 8, 9 se pueden formar $4.5^2 + 3.5^2 + 5 + 3$ números mayores o iguales que 1237 y menores o iguales que 3837.

Ejemplo 18. Si A es un conjunto de n elementos y B es un conjunto de k elementos. ¿Cuántas funciones suryectivas de A en B se pueden definir?
Si $n < k$ entonces no puede definirse ninguna función suryectiva de A en B. Por lo tanto veamos qué pasa si $1 \leq k \leq n$. Sea $F(n,k)$ la cantidad de funciones suryectivas de un conjunto de n elementos en un conjunto de k elementos. Determinar una fórmula para $F(n,k)$ es difícil. En lugar de eso, haremos algo más sencillo: hallaremos una relación de recurrencia que nos permitirá calcular $F(n+1,k)$ conociendo $F(n,k)$ y $F(n,k-1)$.
Dejamos como ejercicio verificar que, cualquiera sea n, $F(n,1) = 1$ y $F(n,n) = n!$. Veremos que para $2 \leq k \leq n$ vale que $F(n+1,k) = k.[F(n,k) + F(n,k-1)]$.

Para probar esta igualdad, consideremos el siguiente problema: sea $k \leq n$. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar n bolitas numeradas en k cajas numeradas de manera que en cada caja haya por lo menos una bolita (es decir, no queden cajas vacías)?
Esto es lo mismo que determinar cuántas funciones suryectivas hay de $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ en $B = \{1, 2, \ldots, k\}$ ya que cada ubicación de las bolitas en las cajas puede verse como la función definida por $f(i)$ = número de caja donde está ubicada la bolita i y que en cada caja haya al menos una bolita significa que para todo $j \in B$ existe $i \in A$ tal que $f(i) = j$, es decir, que f sea suryectiva. Luego, $F(n,k)$ es la cantidad de maneras en que se pueden ubicar n bolitas numeradas en k cajas numeradas sin dejar cajas vacías. Ahora, usando esto, probemos que si $2 \leq k \leq n$ entonces $F(n+1,k) = k.[F(n,k) + F(n,k-1)]$.

Es claro que $F(n+1,k)$ no depende de la forma que elijamos para hacer la distribución de las bolitas. Por lo tanto, $F(n+1,k)$ es igual a la cantidad de maneras en que puede colocarse la bolita $n+1$ sola en una de las k cajas y luego distribuir las primeras n bolitas en las otras $k-1$ cajas de forma que ninguna de ellas esté vacía (esto cuenta todos los casos en los que la bolita $n+1$ se encuentra sola en una caja) más la cantidad de maneras en que pueden distribuirse las primeras n bolitas en las k cajas de forma que ninguna esté vacía y luego colocar la bolita $n+1$ en alguna de esas k cajas (esto cuenta todos los casos en los que la bolita $n+1$ no se encuentra sola en una caja). El primer sumando es igual a $k.F(n,k-1)$ pues hay k maneras de elegir una caja para la bolita $n+1$ y $F(n,k-1)$ maneras de ubicar las primeras n bolitas en las restantes $k-1$ cajas sin dejar cajas vacías y el segundo es igual a $k.F(n,k)$ pues hay $F(n,k)$ maneras de ubicar las primeras n bolitas en las k cajas sin dejar cajas vacías y k maneras de ubicar la bolita $n+1$ en alguna de las k cajas. Luego, $F(n+1,k) = k.F(n,k-1) + k.F(n,k)$ como queríamos probar.

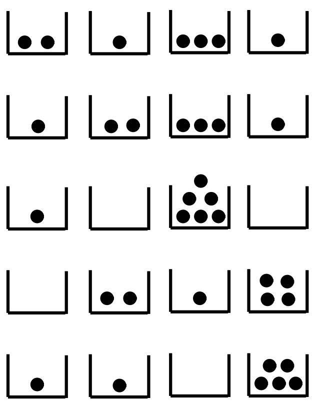
Ahora calculemos $F(n,k)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y $1 \leq k \leq n$ usando que $F(n,1) = 1$, $F(n,n) = n!$ y $F(n+1,k) = k.F(n,k) + k.F(n,k-1)$ para $2 \leq k \leq n$. Para $n = 1$ el único valor posible de k es 1. En este caso $F(1,1) = 1$.
Para $n = 2$ los valores posibles de k son 1 y 2. En este caso $F(2,1) = 1$ y $F(2,2) = 2! = 2$.
Para $n = 3$ los valores posibles de k son 1, 2 y 3. En este caso se tiene que $F(3,1) = 1$, $F(3,2) = 2.[F(2,2) + F(2,1)] = 2.3 = 6$ y $F(3,3) = 3! = 6$.
Para $n = 4$ y $1 \leq k \leq 4$ se tiene que $F(4,1) = 1$, $F(4,2) = 2.[F(3,2) + F(3,1)] = 2.7 = 14$,

$F(4,3) = 3.[F(3,3) + F(3,2)] = 3.12 = 36$ y $F(4,4) = 4! = 24$.
Para $n = 5$ y $1 \leq k \leq 5$ se tiene que $F(5,1) = 1$, $F(5,2) = 2.[F(4,2)+F(4,1)] = 2.15 = 30$, $F(5,3) = 3.[F(4,3) + F(4,2)] = 3.50 = 150$, $F(5,4) = 4.[F(4,4) + F(4,3)] = 4.60 = 240$ y $F(5,5) = 5! = 120$.

Ejercicio. Probar que

i) $F(n,2) = 2^n - 2$ para todo $n \geq 2$
ii) $F(n,3) = 3^n - 3.2^n + 3$ para todo $n \geq 3$

Ejemplo 19. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 7 bolitas indistinguibles en 4 cajas numeradas?
Veamos que esto es lo mismo que contar cuántas palabras se pueden formar permutando las letras de BBBBBBBCCC



$\longleftrightarrow$ BBCBCBBBCB

$\longleftrightarrow$ BCBBCBBBCB

$\longleftrightarrow$ BCCBBBBBBC

$\longleftrightarrow$ CBBCBCBBBB

$\longleftrightarrow$ BCBCCBBBBB

Como se ve, cada ubicación de las bolitas en las cajas se corresponde con un anagrama de BBBBBBBCCC. La cantidad de bolitas en primera caja es la cantidad de letras B que hay antes de la primera C, la cantidad de bolitas en la segunda caja es la cantidad de letras B que hay entre la primera y la segunda C, la cantidad de bolitas en la tercera caja es la cantidad de letras B que hay entre la segunda y la tercera C y la cantidad de bolitas en la cuarta caja es la cantidad de letras B que hay después de la tercera C.
Luego, la cantidad de maneras de ubicar las bolitas es igual a la cantidad de anagramas de BBBBBBBCCC, es decir,

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!.3!}$$

En general, la cantidad de maneras de ubicar k bolitas indistinguibles en n cajas numeradas es igual a la cantidad de anagramas de

$$\underbrace{\text{BB...B}}_{k}\underbrace{\text{CC...C}}_{n-1}$$

es decir,

$$\binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Ejemplo 20. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 15 bolitas indistinguibles en 7 cajas numeradas con la condición de que ninguna caja quede vacía?
Primero colocamos una bolita en cada caja (de esta manera nos aseguramos de que no haya cajas vacías) lo que puede hacerse de una sola manera ya que las bolitas son todas iguales. Ahora colocamos las restantes 8 bolitas en las 7 cajas sin condiciones. Luego, esto puede hacerse de

$$\binom{8+7-1}{8} = \binom{14}{8} = \frac{14!}{8!.6!}$$

maneras

Ejemplo 21. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 15 bolitas indistinguibles en 7 cajas numeradas con la condición de que la primera caja no puede quedar vacía, la cuarta caja debe contener al menos 3 bolitas y la quinta caja debe tener exactamente 1 bolita?
Primero colocamos una bolita en la primera caja, 3 en la cuarta y 1 en la quinta, lo que puede hacerse de una única manera ya que las bolitas son indistinguibles. Ahora nos llevamos la quinta caja para que no caigan más bolitas en ella y colocamos las 10 restantes bolitas en las 6 cajas que quedan sin restricciones. Luego, la cantidad de maneras es

$$\binom{10+6-1}{10} = \binom{15}{10} = \frac{15!}{10!.5!}$$

Ejemplo 22. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 10 bolitas blancas y 13 bolitas negras en 8 cajas numeradas?
Primero colocamos las bolitas blancas en las 8 cajas, esto puede hacerse de $\binom{10+8-1}{10}$ maneras. Ahora, para cada una de estas colocamos las bolitas negras en las 8 cajas y esto puede hacerse de $\binom{13+8-1}{13}$ maneras. Por lo tanto, en total hay

$$\binom{10+8-1}{10}\binom{13+8-1}{13}$$

maneras de ubicar las bolitas.

Ejemplo 23. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas con la condición de que haya exactamente 3 cajas vacías?
Primero elegimos 3 cajas para dejarlas vacías, eso lo podemos hacer de $\binom{12}{3}$ maneras. Ahora colocamos una bolita en cada una de las 9 cajas que no fueron elegidas para asegurar que no haya ninguna otra caja vacía y ubicamos las 91 bolitas restantes en las 9 cajas, eso lo podemos hacer de $\binom{91+9-1}{91}$ maneras. Luego, en total hay

$$\binom{12}{3}\binom{91+9-1}{91}$$

maneras.

Ejemplo 24. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas con la condición de que haya a lo sumo 3 cajas vacías?
Esto es lo mismo que sumar la cantidad de maneras se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas sin dejar ninguna caja vacía más la cantidad de maneras en que se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas dejando exactamente 1 caja vacía más la cantidad de maneras en que se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas dejando exactamente 2 cajas vacías más la cantidad de maneras en que se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas dejando exactamente 3 cajas vacías, es decir,

$$\binom{88+12-1}{88}+\binom{12}{1}\binom{89+11-1}{89}+\binom{12}{2}\binom{90+10-1}{90}+\binom{12}{3}\binom{91+9-1}{91}$$

Ejemplo 25. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas con la condición de que haya por lo menos 3 cajas vacías?
Estas son todas las maneras de ubicar las bolitas sin restricciones menos la cantidad de maneras en que se pueden ubicar 100 bolitas indistinguibles en 12 cajas numeradas con la condición de que haya a lo sumo 2 cajas vacías, es decir

$$\binom{100+12-1}{100}-\left[\binom{88+12-1}{88}+\binom{12}{1}\binom{89+11-1}{89}+\binom{12}{2}\binom{90+10-1}{90}\right]$$

Ejemplo 26. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 8 bolitas indistinguibles en 17 cajas numeradas con la condición de que en cada caja haya a lo sumo una bolita?
Esto es lo mismo que elegir 8 de las 17 cajas y poner una bolita en cada una de ellas. Esto puede hacerse de $\binom{17}{8}$ maneras.

Ejemplo 27. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 8 bolitas blancas y 7 bolitas negras en 17 cajas numeradas con la condición de que en cada caja haya a lo sumo una bolita blanca?
Colocando primero las blancas y luego las negras, se tiene que la cantidad de maneras es

$$\binom{17}{8}\binom{7+17-1}{7}$$

Ejercicio. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 9 bolitas blancas y 6 bolitas rojas en 19 cajas con la condición de que en cada caja haya a lo sumo una bolita de cada color? (es decir, en cada caja puede no haber ninguna bolita o puede haber sólo una bolita blanca o puede haber sólo una bolita roja o puede haber una bolita blanca y una roja).

Nociones elementales sobre probabilidades. Consideremos el siguiente experimento aleatorio: tirar un dado. Llamaremos *espacio muestral* al conjunto de posibles resultados

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y *eventos* a sus subconjuntos. Por ejemplo, el evento "sale un número par" es el subconjunto $A = \{2, 4, 6\}$.
Consideremos ahora el experimento: tirar dos veces un dado. En este caso el espacio muestral es

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}$$

y los eventos
$A=$ "la suma de los números que salen es igual a 6"
$B =$ "salen dos números iguales"
$C =$ "salen dos números iguales cuya suma es 6"
$D =$ "salen dos números distintos"
$E =$ "salen dos números distintos cuya suma es 6"
son los subconjuntos de Ω
$A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$, $B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$,
$C = A \cap B$, $D = B'$ y $E = A - B$

Ejercicio. Describa en palabras los eventos $\emptyset$, Ω, $A \cup B$, $A \triangle B$.

Notar que $A \subseteq B$ significa que la ocurrencia de A implica la ocurrencia de B. Si los eventos A y B son disjuntos diremos que A y B son *eventos excluyentes*.

Supongamos ahora que el experimento consiste en tirar una moneda. El espacio muestral es $\Omega = \{\text{cara, ceca}\}$. Queremos ver cómo definir la probabilidad del evento $A =$ "sale cara". Para ello observamos que si repetimos el experimento muchísimas veces, aproximadamente la mitad de las veces saldrá cara y la otra mitad ceca. Es razonable entonces definir la probabilidad de que ocurra A como $P(A) = \frac{1}{2}$.
Consideremos nuevamente el experimento aleatorio de tirar un dado y su conjunto de posibles resultados

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Si el dado no está cargado, entonces repitiendo el experimento muchas veces vemos que cada número entre 1 y 6 ocurre un sexto de las veces y, como en Ω hay tres pares, el evento "sale un número par" ocurre $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ de las veces ($\frac{1}{6}$ de las veces sale un 2, $\frac{1}{6}$ de las veces sale un 4 y $\frac{1}{6}$ de las veces sale 6). Luego, definiremos la probabilidad de que ocurra $A = \{1\}$ como $P(A) = \frac{1}{6}$ y la probabilidad de que ocurra $B = \{2, 4, 6\}$ como

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{\#B}{\#\Omega}$$

Si ahora el experimento es tirar 3 veces una moneda, el espacio muestral tiene 8 elementos (¿porque?). El evento $A =$ "salen dos caras y una ceca" tiene 3 elementos. Si repitiéramos el experimento muchas veces, cada uno de los elementos de A ocurrirá un octavo de las veces y por lo tanto el evento A ocurrirá aproximadamente $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ de las veces. Definimos entonces su probabilidad como

$$P(A) = \frac{3}{8} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

En general, sea Ω el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio. Si al repetir el experimento muchas veces cada elemento de Ω ocurre con la misma frecuencia (por ejemplo, al tirar un dado que no esté cargado cada número entre 1 y 6 ocurre $\frac{1}{6}$ de las veces), para cada evento A definimos la *probabilidad de* A como

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Propiedades.

Las propiedades fundamentales de P son:
i) $P(A) \geq 0$ para todo $A \subseteq \Omega$
ii) $P(\Omega) = 1$
iii) Si A y B son eventos excluyentes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

De i), ii) y iii) pueden deducirse otras propiedades, por ejemplo,
iv) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
v) $P(A) \leq 1$ para todo $A \subseteq \Omega$
vi) $P(\emptyset) = 0$
vii) $P(A') = 1 - P(A)$ para todo $A \subseteq \Omega$
viii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
ix) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos excluyentes dos a dos entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n)) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Ejemplos.

1. Si extraemos al azar una carta de un mazo de 40 cartas españolas, ¿cuál es la probabilidad de que salga

i) un as?
ii) un as de espadas?
iii) una copa?

Respuestas: i) $\frac{4}{40}$, ii) $\frac{1}{40}$, iii) $\frac{10}{40}$

2. Al tirar dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de que salga una cara y una ceca?

Notar que si queremos que al repetir el experimento muchas veces cada elemento de Ω ocurra con la misma frecuencia debemos distinguir las monedas: si no hacemos esto, el espacio muestral sería

$$\Omega = \{2 \text{ caras},\ 1 \text{ cara y } 1 \text{ ceca},\ 2 \text{ cecas}\}$$

Pero entonces los elementos "2 caras" y "1 cara y 1 ceca" de Ω no ocurrirían con la misma frecuencia. Intuitivamente, la mitad de las veces saldrá lo mismo en las dos monedas (ambas caras o ambas cecas) y la mitad de las veces saldrá una cara y una ceca, es decir, un cuarto de las veces saldrán dos caras, un cuarto de las veces dos cecas y la mitad de las veces una cara y una ceca. Para evitar este inconveniente distinguimos las monedas pintando una de rojo y una de verde a los efectos de poder calcular la probabilidad. Ahora, el espacio muestral es

$$\begin{aligned}\Omega \ &= \{1 \text{ cara roja y } 1 \text{ cara verde},\ 1 \text{ cara roja y } 1 \text{ ceca verde},\\ &\quad 1 \text{ cara verde y } 1 \text{ ceca roja},\ 1 \text{ ceca roja y } 1 \text{ ceca verde}\}\end{aligned}$$

y al repetir muchas veces el experimento todos sus elementos ocurren con aproximadamente la misma frecuencia.
Luego, la probabilidad de que salga una cara y una ceca es $\frac{2}{4}$.

3. Si tiramos tres dados, ¿cuál es la probabilidad de que el producto de los números que salieron sea 12?

Como en el ejemplo anterior, distinguimos los dados pintando uno de verde, uno de rojo y uno de azul. El espacio muestral Ω consiste de las 3-uplas donde la primer coordenada (dado verde) puede tomar 6 valores, la segunda (dado rojo) puede tomar 6 valores y la tercera (dado azul) 6 valores. Luego, $\#\Omega = 6^3$.
El evento $A =$ "el producto de los números que salieron es 12" consiste de las 3-uplas
$(1, 2, 6)$ y todas sus permutaciones ($3! = 6$ elementos)
$(1, 3, 4)$ y todas sus permutaciones ($3! = 6$ elementos)
$(2, 2, 3)$ y todas sus permutaciones ($\frac{3!}{2!} = 3$ elementos)
Luego, $P(A) = \dfrac{15}{6^3}$.

4. En un salón hay 50 personas, 10 de las cuales son japonesas y las 40 restantes son españolas. Si extraemos al azar 15 personas, una a la vez y con reposición (es decir, extraemos la primera persona, anotamos su nombre y la reponemos, luego extraemos la segunda, anotamos su nombre y la reponemos, etc.). ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 6 de las 15 personas extraídas sean españolas?

Aquí el espacio muestral son las 15-uplas donde cada una de las 15 coordenadas puede ser cualquiera de las 50 personas. Luego, $\#\Omega = 50^{15}$.

Veamos cuántos elementos tiene el evento $A =$ "exactamente 6 de las personas extraídas son españolas". Los elementos de A son las 15-uplas tales que 6 de sus coordenadas son alguno de los 40 españoles y las restantes 9 coordenadas son alguno de los 10 japoneses. Luego,

$$\#A = \binom{15}{6} 40^6.10^9$$

y por lo tanto

$$P(A) = \frac{\binom{15}{6} 40^6.10^9}{50^{15}}$$

5. En un barco hay 50 personas, 10 de las cuales son japonesas y las 40 restantes son españolas. Si se bajan al azar 15 personas del barco, una a la vez y sin reposición (es decir, baja la primera persona, anotamos su nombre, luego baja la segunda, anotamos su nombre, etc.). ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 6 de las 15 personas que bajaron sean españolas?

Aquí el espacio muestral son las 15-uplas donde la primera coordenada puede ser cualquiera de las 50 personas, la segunda cualquiera de las 49 que quedan, etc. Luego, $\#\Omega = \binom{50}{15} 15!$. Veamos cuántos elementos tiene el evento $A =$ "exactamente 6 de las personas que bajaron son españolas". Los elementos de A son las 15-uplas tales que 6 de sus coordenadas son españoles y las restantes 9 coordenadas son japoneses. Luego,

$$\#A = \binom{15}{6}\binom{40}{6} 6! \binom{10}{9} 9!$$

Por lo tanto,

$$P(A) = \frac{\binom{15}{6}\binom{40}{6} 6! \binom{10}{9} 9!}{\binom{50}{15} 15!} = \frac{\binom{40}{6}\binom{10}{9}}{\binom{50}{15}}$$

6. En una bolsa hay 40 bolitas blancas numeradas y 100 bolitas negras numeradas. Si se extraen 15 bolitas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que salgan

i) al menos 12 blancas?

ii) a lo sumo 11 blancas?

i) Sea A el evento "salen al menos 12 blancas" . Si consideramos los eventos $A_1 =$ "salen exactamente 12 blancas", $A_2 =$ "salen exactamente 13 blancas", $A_3 =$ "salen exactamente 14 blancas" y $A_4 =$ "salen exactamente 15 blancas" entonces A_1, A_2, A_3 y A_4 son eventos excluyentes dos a dos y su unión es A. Luego

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) =$$

$$= \frac{\binom{40}{12}\binom{100}{3}}{\binom{140}{15}} + \frac{\binom{40}{13}\binom{100}{2}}{\binom{140}{15}} + \frac{\binom{40}{14}\binom{100}{1}}{\binom{140}{15}} + \frac{\binom{40}{15}}{\binom{140}{15}}$$

ii) Sea B el evento "salen a lo sumo 11 blancas". Entonces $B = A'$. Luego $P(B) = 1 - P(A)$.