Práctica No. 4

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Decidir en cada caso si corresponde $\subset, \supset$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{cccc}
(i) & f(A \cup B) & \ldots\ldots & f(A) \cup f(B) \\
(ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
(iii) & f(A \cap B) & \ldots\ldots & f(A) \cap f(B) \\
(iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
(v) & f(\mathbb{R}^n - A) & \ldots\ldots & \mathbb{R}^m - f(A) \\
(vi) & f^{-1}(\mathbb{R}^m - X) & \ldots\ldots & \mathbb{R}^n - f^{-1}(X)
\end{array}$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}^n$ son la misma función.

3. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

   (a) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función:

   $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función:

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} & \text{si } x = \dfrac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

4. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado es abierto o cerrado (o ninguna de las dos cosas) y probarlo:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$.

   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 1 < xy + z < 2\}$.

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sin^2(x) - xy^2 \geq -2\}$.

5. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. [Sug.: considere la función continua $x - f(x)$.]

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Probar que el gráfico de f es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$. ¿Vale la recíproca?

   (Si no sabe responder la pregunta mire el siguiente ejercicio y piense de nuevo.)

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y sea $f : S \to \mathbb{R}^m$ una función tal que la imagen de f es un conjunto acotado y el gráfico de f es un conjunto cerrado. Demostrar que f es continua.

8. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

9. (a) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es conexo. Qué ocurre con $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? ¿Y con $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$?
   (b) ¿Es $\mathbb{R}$ conexo? (cf. ejercicio 10, Práctica 3)
   (c) Demostrar que el intervalo $[0, 1]$ es conexo y que por lo tanto cualquier intervalo $[a, b]$ también lo es.
   (d) Usando la función continua $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ y la parte (b), demostrar que el intervalo $(-1, 1)$ es conexo. Deducir que cualquier intervalo de la forma (a, b) es conexo.

10. Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$, el segmento $\overline{vw}$ que une v con w se puede describir como: $\overline{vw} = \{v + t(w - v) : t \in [0, 1]\}$.
    (a) Demostrar que $\overline{vw}$ es un conjunto conexo.
    (b) Sea ahora u otro punto en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que la poligonal $\Pi := \overline{vw} \cup \overline{wu}$ es un conjunto conexo. Convencerse de que cualquier poligonal en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto conexo.
    (c) Demostrar que dos puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ pueden unirse por una poligonal totalmente contenida en el conjunto (además formada por segmentos "horizontales" y "verticales"). Deducir que $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ es conexo.

11. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:
    (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \| x \|$.
    (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \| x \|^2$.
    (c) $f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\sqrt{x}, \cos x)$, con $r = 0$ y con $r > 0$.
    (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x, y) = x^2 + 3y$.
    (e) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

12. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \to \mathbb{R}^m$ funciones uniformemente continuas.
    (a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.
    (b) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua.
    (c) Probar que si $h : f(S) \to \mathbb{R}^k$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \to \mathbb{R}^k$ también lo es.

13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.

    ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces lo es en $A \cup B$?

14. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* x_0 *y* α *números reales. Se dice que* f es localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0 *si existen* $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ *tales que*

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \textit{para todo } x \quad \textit{tal que} \ \ 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

(a) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0.

(b) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0 entonces f es derivable en x_0.

15. Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas:

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\cos x, \sin x)$.

16. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular "*unif. cont.* $\not\Rightarrow$ *Lipschitz*").

17. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz. En particular, existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\| f(x) - f(x') \| \leq M \| x - x' \|$, $\forall x, x' \in S$. Demostrar que si S es cerrado, $M < 1$ y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f *tiene un punto fijo.*

    [Sug.: considere la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.]

    Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.

19. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $f : K \to K$ una función que verifica que la desigualdad $\| f(x) - f(x') \| < \| x - x' \|$ vale para todo $x, x' \in K$ (en particular, f es Lipschitz con $M = 1$).

    (a) Demostrar que f tiene un punto fijo.

    (b) Comparar con los ejercicios 6, 16 y 17.

    [Sug.: considere la función $g : K \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \| x - f(x) \|$.]

20. En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$:

    (a) $f_n(c) = x^n$, $S = (-1, 1]$.

    (b) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$, $S = (1, +\infty)$.

    (c) $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$, $S = [0,1]$.

21. (a) Probar que la sucesión del ejercicio 19(a) converge uniformemente en $T = (0, 1/2)$, pero en $S = (-1, 1]$ converge puntualmente a una función que no es continua.

    (b) Probar que la sucesión del ejercicio 19(b) converge uniformemente en $T = [2, 5]$.

22. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

(a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, sobre todo $\mathbb{R}$.

(b) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$, sobre todo $\mathbb{R}$.

(c) $f_n(x,y) = \dfrac{n}{n+1}(x,y)$, sobre todo $\mathbb{R}^2$.

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \ \text{ ó } \ x = 0 \\ b + \dfrac{1}{n} & \text{si } x = \dfrac{a}{b}, \ b > 0 \text{ y } (a:b) = 1 \end{cases}$, sobre $[0,1]$.

23. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a una función continua, pero la convergencia no es uniforme.

24. Sea $S \subset \mathbb{R}^N$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \to \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces vale:

(a) f es acotada.

(b) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).

25. Sea $S \subset \mathbb{R}^N$ y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones de S en $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente a funciones $f, g : S \to \mathbb{R}$ respectivamente.

(a) Probar que $f_n + g_n$ converge uniformemente a $f + g$.

(b) Probar que si f_n y g_n están acotadas para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $f_n g_n$ converge uniformemente a fg.

(c) Mostrar que el item (b) no vale sin la hipótesis de acotación.

26. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n.$$

(a) Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0,1]$.

(b) Verificar que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))\,dx$.
