Práctica No. 2

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$. [Considerar la integral impropia divergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{10x}}$.]

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$. [Considerar la integral impropia convergente $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$.]

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$.

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$.

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$.

   (j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$.

2. Demostrar la desigualdad

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}.$$

3. Si $r_n := 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)$, demostrar que r_n converge.

4. Hallar la suma de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

5. Hallar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

   [Sugerencia: descomponer el término general de la serie en la forma $\frac{3n^2-4n+2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$, para $A, B, C \in \mathbb{R}$ adecuados.]

6. En cada uno de las series que siguen calcular la cantidad de términos hay que sumar para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las serie correspondiente.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

7. ¿Es cierto que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series divergentes, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es divergente?

8. Probar el siguiente teorema de Abel: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de números positivos tal que $\sum a_n$ converge, entonces $na_n \to 0$ si $n \to \infty$.

   [Sugerencia: $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \to 0$ si $n \to \infty$, y similarmente para na_{2n+1}.]

9. Probar el siguiente criterio de convergencia (condensación de Cauchy): Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la serie $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

10. Decidir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, 2^n}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n^2-2n-1}{n!}$

11. (a) Mostrar que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Vale este resultado si $\sum a_n$ converge sólo condicionalmente?

    (b) ¿Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq 0$, se puede concluir algo de $\sum \sqrt{a_n}$?

12. Probar el siguiente criterio de Dirichlet: Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona decreciente de números positivos, con $\lim b_n = 0$. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tales que existe $K > 0$ y las sumas parciales $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ satisfacen $|S_n| \leq K$. Entonces la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.

    [Sugerencia: $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{N-1}(b_{N-1} - b_N) + S_N b_N$].

13. (a) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ no múltiplo entero de 2π. Probar que las sucesiones $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ verifican la condición de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del ejercicio anterior.

    (b) Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números positivos, con $\lim b_n = 0$. Mostrar que si θ no es múltiplo entero de 2π, las series

    $$\sum b_n \cos n\theta \qquad \text{y} \qquad \sum b_n \sin n\theta$$

    son ambas convergentes.

    Así, por ejemplo, las series $\sum (\cos n\theta)/n^\alpha$ y $\sum (\sin n\theta)/n^\alpha$ son convergentes para todo $\alpha > 0$.

14. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| < 1$. Mostrar que

    $$1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \cdots + n\alpha^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

15. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes (no necesariamente absolutamente), ¿es la serie producto (de Cauchy) convergente?

    [Sugerencia: Considerar $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, con $n \geq 1$.]

16. Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales convergen las series:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{x}{3^n})$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{n^n}$
