Práctica No. 1

1. A partir de las siguientes propiedades de orden de los números reales:

   i) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$, se tiene que $a < b$ ó $b < a$.
   ii) Si $a < b$, entonces $\forall c$, $a + c < b + c$.
   iii) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < ab$.
   iv) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

   Mostrar los siguientes hechos:

   (a) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
   (b) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.
   (c) Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$.
   (d) Si $x^2 + y^2 = 0$, entonces se tiene que $x = y = 0$.

2. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Probar que son equivalentes las siguientes definiciones alternativas del supremo de A.

   (a) s verifica que:
      i. $\forall a \in A$ se tiene $s \geq a$;
      ii. si $t \geq a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geq s$.
   (b) s verifica que:
      i. $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      ii. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.
   (c) s verifica que:
      i. $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      ii. existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida A tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

   Enunciar equivalencias análogas para el ínfimo (y si le costaron los ítems anteriores demuestre alguna).

3. Sean A y $B \subseteq \mathbb{R}$, dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

   (a) Suponiendo que A y B están acotados superior e inferiormente, establecer y demostrar las relaciones de orden entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$, $\inf(B)$.
   (b) ¿Qué sucede cuando A o B no está acotado superior o inferiormente?

4. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(a) $A_1 = (a, b]$.

(b) $A_2 = \left\{ \dfrac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

(c) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.

(d) $A_4 = \left\{ x \in \mathbb{Q}\ : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \right\}$.

(e) $A_5 = \left\{ x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R} \right\}$.

(f) $A_6 = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

(g) $A_7 = \left\{ x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4) \right\}$.

5. Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío se definen, para cada $c \in \mathbb{R}$, $c.A = \{c.x : x \in A\}$ y $-A = (-1).A$.

   (a) Probar que si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente y vale $\inf(-A) = -\sup A$.

   (b) Probar que si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces $c.A$ también lo está y $\sup(c.A) = c \sup A$.

   (c) ¿Qué se puede decir en el caso que $c < 0$?

   (d) Enunciar resultados análogos a los anteriores para $\inf(c.A)$ (y demuestre alguno(s) si tiene ganas).

6. Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ambos no vacíos se definen

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
$$A.B := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

   (a) ¿Qué condiciones deben verificar A y B para que exista $\sup(A + B)$? Estudiar la relación entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$.

   (b) ¿Es posible dar resultados parecidos a los de la parte (a) para $A.B$ y los números $\sup(AB)$ y $\sup(A).\sup(B)$? ¿Cuáles?

7. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

   (a) Probar que

      i. Si $r < L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r\ \forall\, n \geq n_0$.

      ii. Si $r > L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r\ \forall\, n \geq n_0$.

   (b) ¿Puede reformularse (a) i. si se sabe que $r \leq L$?

   (c) ¿Qué puede decirse de L si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r\ \forall\, n \geq n_0$?

8. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

9. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

10. Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados encajados acotados y para cada n sea λ_n la longitud de I_n.

   (a) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$ existe.

   (b) Demostrar que si $L := \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, entonces $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ es un intervalo cerrado de longitud L.

11. Se define recursivamente la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue:

$$x_1 > 0 \qquad x_{n+1} := a/(1+x_n),$$

   donde $a > x_1^2 + x_1$.

   (a) Probar que los intervalos cerrados $[x_n, x_{n+1}]$ forman un encaje de intervalos con un único punto común ξ.

   (b) Probar que ξ es raíz del polinomio $X^2 + X - a$.

   [Pruebe que $x_{n+1} - x_n$ y $x_n - x_{n-1}$ tiene signos diferentes y que $|x_{n+1} - x_n| \leq \theta|x_n - x_{n-1}|$ para $0 \leq \theta < 1$ adecuado.]

12. Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un número $\alpha \in \mathbb{R}$, se dice que α es un *punto límite de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.

   Hallar los puntos límites de las sucesiones:

   (a) $1 - \dfrac{1}{n}$ (b) $(-1)^n$ (c) $\cos(\dfrac{n\pi}{2})$

   (d) $(-1)^n(2 + \dfrac{3}{n})$ (e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots$ (f) $\dfrac{n + (-1)^n(2n+1)}{n}$

13. Hallar los límites superior e inferior de las sucesiones del ejercicio anterior.

14. Se tienen sucesiones acotadas de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los cuatro números que siguen:

   - $\liminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
   - $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
   - $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$
   - $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.