Sistemas de partículas interactivas

Entrega: 5 de junio 2014

Procesos de Markov a tiempo continuo

1. Probar que si $(S_i)_{i\geq 1}$ es una sucesión da variables i.i.d., $S_i \sim exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, y se define
$$N_t = \sup\{i, S_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}$$
entonces el proceso $(N_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes. Es decir, dado $k \in \mathbb{N}$ y $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k$,
$$N_{t_1} - N_{t_0}, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$$
son k variables aleatorias independientes.

2. Sean $S_i \sim exp(\lambda_i)$, $\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$, variables aleatorias independientes. Probar que

   i) Si $\sum_i \frac{1}{\lambda_i} < \infty$ entonces $\mathbb{P}(\sum_i S_i < \infty) = 1$.

   ii) Si $\sum_i \frac{1}{\lambda_i} = \infty$ entonces $\mathbb{P}(\sum_i S_i = \infty) = 1$.

3. Sea $(S_i)_{i\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$, y $(X_i)_{i\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución de Bernoulli de parámetro $p \in (0, 1)$, independiente de la sucesión anterior.

   Consideremos el Proceso de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ generado por los saltos provenientes de la sucesión $(S_i)_{i\geq 1}$. Ahora definamos un nuevo proceso de conteo $(M_t)_{t\geq 0}$, que resulta del siguiente procedimiento: el salto S_i no se produce si $X_i = 0$ y permanece si $X_i = 1$.

   Probar que $(M_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson de parámetro λp.

Reversibilidad

4. Sea Q una q-matriz irreducible tal que $\sup_{i\in I} q_i < \infty$, con distribución invariante $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$.

   i) Probar que la cadena de Markov a tiempo continuo asociada a Q es no explosiva: si definimos $\zeta := \sum_n S_n$, con $(S_n)_{n\geq 0}$ sus tiempos de espera entre saltos, entonces $\mathbb{P}(\zeta = \infty) = 1$.

   ii) Probar que $\hat{Q} = (\hat{q}_i j : i, j \in I)$ definida por $\lambda_i \hat{q}_{ij} = \lambda_j q_{ji}$ es una q-matriz irreducible cuya cadena de Markov asociada es no explosiva.

iii) Sea $(P(t),\, t \geq 0)$ la matriz de transición determinada por Q, sabemos por el Teorema 2.14 que $(P(t),\, t \geq 0)$ es la solución no-negativa minimal de la ecuación forward $P'(t) = P(t)Q$, $P(0) = Id$. Definir $\hat{p}_{ij}(t)$ como $\lambda_i \hat{p}_{ij}(t) = \lambda_j p_{ji}(t)$, y probar que la matriz $\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t))_{ij}$ satisface la ecuación backward $\hat{P}'(t) = \hat{Q}\hat{P}(t)$, $\hat{P}(0) = Id$, y que además es la solución no-negativa minimal. Mostrar que $\hat{Q}$ es λ-invariante.

iv) Sea ahora $T > 0$ fijo, $(X_t, t \geq 0)$ Markov (λ, Q). Probar que $\hat{X}_t := X_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$, es Markov $(\lambda, \hat{Q})$. (Sugerencia: adaptar la demostración del resultado análogo para cadenas de Markov discretas)

5. Decimos que una q-matriz y una medida λ están en balance detallado si $\lambda_i q_{ij} = \lambda_j q_{ji}$. Probar que en estas condiciones λ es invariante para Q. Si esto se cumple, en las condiciones el ejercicio 4) anterior, diremos que $(X_t, t \geq 0)$ es reversible.

Ergodicidad

6. Sea Q una q-matriz irreducible, μ una distribución cualquiera en el espacio de estados I.

   Sea T_i^+ el primer tiempo de retorno a la posición $i \in I$ de $(X_t^i, t \geq 0)$ Markov (δ_i, Q), es decir $T_i := \inf_{t>0}\{X_t^i = i, \exists\, 0 < s < t, X_s^i \neq i\}$. Consideremos $m_i = \mathbb{E}[T_i] \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ su valor medio.

   i) Probar que si $(X_t,\, t \geq 0)$ es Markov (μ, Q) entonces

   $$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X_s=i\}}\, ds \;\to \frac{1}{m_i q_i} \text{ cuando } t \to \infty\Big) = 1.$$

   ii) En el caso en que la cadena determinada por Q sea positiva recurrente, entonces

   $$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\, ds \;\to \bar{f} \text{ cuando } t \to \infty\Big) = 1,$$

   donde $\bar{f} = \sum_{i \in I} \lambda_i f(i)$ es el valor medio de f tomado con respecto a la (única) distribución invariante λ.

Teoría de colas

Pedir que los tiempos de arribo estén modelados por un proceso de Poisson no es muy restrictivo, pero se desea trabajar con una familia mayor de distribuciones para medir los tiempos entre servicios en la cola. Consideramos entonces los modelos M/G/1: la primera M dice que los tiempos entre arribos son *memoryless*, es decir exponenciales, por lo tanto el proceso de arribos es Poisson, la G significa que los sucesivos tiempos de servicios son variables i.i.d con una distribución general, y el 1 significa que el sistema opera con un solo servidor. El objetivo del ejercicio siguiente es probar que, aún cuando el tamaño de la cola $(X_t)_{t\geq 0}$ ya no es más un proceso de Markov, podemos extraer suficiente información para estudiar la estabilidad del modelo; es decir, determinar si la cola se vacía con suficiente frecuencia.

7. En la cola M/G/1 los servicios se activan cuando llega un cliente al servidor, por lo tanto si la cola está vacía en el instante t, $X_t = 0$, habrá que esperar hasta el tiempo $T = \inf\{s \geq t, X_s \neq 0\}$ en que llega un cliente, para que se active el servidor. Llamemos F a la distribución de los servicios, y sean $\{T_i\}_{i\geq 1}$ los tiempos de servicios, que son una sucesión de variables i.i.d. con distribución F.

   i) Llamemos X_n al tamaño de la cola cuando se termina de servir al n-ésimo cliente. Probar que

   $$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - 1_{X_n \geq 1}, \quad \text{donde}$$
   $$Y_n = \sharp\{\text{clientes que arriban mientras se produce el servicio } T_n\}.$$

   ii) Probar que $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_1) = \frac{\lambda}{\mu} =: \rho$, si λ es la intensidad del proceso Poisson de arribos y $E(T_n) = \mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{\mu}$.

   iii) Concluir que

   $$X_n = X_0 + (Y_1 + \cdots + Y_n) - n + Z_n,$$

   donde Z_n es la cantidad de veces que la cola se vacía hasta el n-ésimo servicio.

   iv) Fijemos $X_0 = 0$, es decir la cola está inicialmente vacía. Probar que

   $$1 - \rho \leq \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{n}. \tag{1}$$

   v) Definimos los tiempos sucesivos entre retornos al origen de $(X_n)_{n\geq 0}$ como

   $$H_1 = \inf\{m \geq 0,\ X_m = 0\}$$
   $$\text{y dado } H_{k-1},\ H_k = \inf\{m \geq H_{k-1},\ X_m = 0\} - H_{k-1}.$$

   Probar que es $\{H_i\}_{i\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d., a valores en $\mathbb{N} \cup 0$, con media $m = \mathbb{E}(H_1) \in (0, \infty]$, y por la LGN

   $$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} H_i = m \qquad \text{c.t.p.}. \tag{2}$$

   Relacionar con la cantidad de retornos al origen, para concluir que (2) implica $\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} = \frac{1}{m}$ c.t.p., y cuando $\rho < 1$, por (1), $m < \infty$.

   Este ejercicio demuestra que cuando $\rho < 1$ el sistema retorna infinitas veces al origen, con un tiempo medio de retorno finito. Comparar la condición obtenida $\rho < 1$ con el caso Markoviano, en que los tiempos de servicio están dados por un proceso de Poisson.