1. Sea X una variable aleatoria a valores en el intervalo $[0,1]$. Hallar el límite en distribución de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. ¿Se trata de alguna distribución conocida?

2. Sean X e Y variables aleatorias. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la variable aleatoria $Z_n = \frac{1}{n} \cdot X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot Y$. Hallar el límite en distribución de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y X variables aleatorias discretas a valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Mostrar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} p_n(k) = p(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

4. Sean $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes tales que vale $0 < p_n < 1$ y $\lambda_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$ y $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n$.

   a) Si $X_n \sim Bi(k, p_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ con $X \sim Bi(k,p)$.
   b) Si $Y_n \sim Ge(p_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ con $Y \sim \mathcal{G}(p)$.
   c) Si $Z_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ con $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

5. Sea X_n una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p_n. Probar que si p_n tiende a cero cuando n tiende a infinito de manera tal que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

6. De un bolillero que contiene en su interior B bolillas blancas y N bolillas negras se extraen sucesivamente y sin reposición n de ellas. Sea $X_{B,N}$ la cantidad de bolillas blancas obtenidas.

   a) ¿Cuál es la distribución de $X_{B,N}$?
   b) Probar que si B y N tienden a infinito de modo tal que $\frac{B}{B+N} \to p$ entonces $X_{B,N} \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim Bi(n,p)$.
   c) Establecer la convergencia en distribución del item anterior en términos de distribuciones conocidas.

7. De un bolillero que contiene en su interior B bolillas blancas y N negras se extraen sin reposición bolillas al azar. Sea $X_{B,N}$ la cantidad de extracciones que fueron necesarias para obtener la primer bolilla blanca. Probar que si B y N tienden a infinito de modo tal que $\frac{B}{B+N} \to p$ entonces $X_{B,N} \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim \mathcal{G}(p)$.[1]

8. Sean $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ sucesiones convergentes tales que $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \mu$ y $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$.

   a) Probar que si $X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.[2]
   b) ¿Qué sucede con la convergencia en distribución si $|\mu| = +\infty$ o $\sigma = +\infty$?

9. Hallar el límite en distribución de la sucesión $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ la variable aleatoria Z_n tiene distribución uniforme en el conjunto $\{\frac{i}{n} : 1 \leq i \leq n\}$.
   b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ la variable aleatoria nZ_n tiene distribución geométrica de parámetro $\frac{\lambda}{n}$.

10. Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \min\{U_1, \ldots, U_n\} \qquad \text{y} \qquad Z_n = \max\{U_1, \ldots, U_n\}.$$

   a) Hallar los límites en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Hallar los límites en distribución de las sucesiones $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = n(Y_n - a) \qquad \text{y} \qquad W_n = n(b - Z_n).$$

[1] Tanto este ejercicio como el anterior muestran que si el número de bolillas en el bolillero tiende a infinito entonces sacar con o sin reposición pierde importancia. ¿Por qué será esto?

[2] Por convención, denotamos por $\mathrm{N}(\mu, 0)$ a la variable aleatoria constante μ.