1. *a*) Demostrar que la función

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x-y} & \text{si } x \geq 0\,,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   no es la función de distribución acumulada de ningún vector aleatorio.

   b) Mostrar que

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) & \text{si } x \geq 0\,,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   sí lo es.

2. Una urna contiene 4 bolitas blancas y 6 negras. Se extraen 3 bolitas sin reposición y se definen las siguientes variables aleatorias:

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} 1 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es par} \\ 0 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es impar} \end{cases} \\ Y &= \text{Número de bolillas negras extraídas.} \end{aligned}$$

   a) Hallar p_{XY} y F_{XY}.

   b) Hallar p_X y p_Y. Determinar si X e Y son independientes.

3. Se arroja un dado equilibrado 2 veces. Sea X_i el número obtenido en la tirada i-ésima.

   a) Sea $Y = X_1 + X_2$. Hallar p_Y.

   b) Sea la variable aleatoria

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y \text{ es par} \\ 0 & \text{si } Y \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Determinar si X_1 y Z son independientes.

4. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{B}i(n+m,p)$.

   b) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

   c) $X \sim \mathcal{G}(p)$, $Y \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{BN}(2,p)$.

5. Se sabe que en la provincia de Salta la proporción de hombres de ojos azules es 20 %, de ojos verdes es 5 %, de ojos negros es 10 % y otro color de ojos es 65 %. Josefina decide viajar de la capital salteña a una ciudad a 200 km. donde se realizará un congreso médico sobre alcoholismo. Para ello debe tomar dos colectivos en los que viajan sólo salteños. Para llevar a cabo una prueba decide tomar una copa de jerez con cada hombre de ojos verdes o azules que encuentre en su viaje. Como su belleza es irresistible, todos los hombres aceptan su invitación. En el primer colectivo viajan 10 hombres de los cuales ninguno transborda al siguiente. En el segundo hay 8 hombres.

   a) Calcular la probabilidad de que en la primera parte del trayecto haya tomado menos de 4 copas.

   b) Calcular la probabilidad de que tome más de 3 copas en total.

6. Manu llega a la final de un torneo de básquet con su equipo. La probabilidad de que su equipo gane un partido contra el otro equipo finalista es p. Los organizadores proponen jugar un número impar de partidos y declarar ganador del torneo a aquel equipo que gane la mitad más uno de los partidos jugados. Siendo capitán de su equipo, los organizadores le preguntan a Manu cuántos partidos quiere jugar: debe decir si prefiere jugar $2k-1$ ó $2k+1$ partidos, donde k un número natural fijado de antemano por los organizadores. ¿Para qué valores de p le conviene a Manu jugar $2k+1$ partidos? [1]

7. El 10 % de la población fuma cigarrillos negros, el 35 % fuma cigarrillos rubios, el 3 % fuma pipa y el resto no fuma. Se realiza una encuesta a 35 personas y con los resultados obtenidos se definen las variables aleatorias

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \text{número de personas que no fuman}\\
Y_2 &= \text{número de personas que fuman cigarrillos rubios}\\
Y_3 &= \text{número de personas que fuman cigarrillos negros}\\
Y_4 &= \text{número de personas que fuman pipa.}
\end{aligned}$$

   a) Hallar la probabilidad puntual del vector aleatorio (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4).

   b) Hallar la probabilidad puntual del vector aleatorio $(Y_1, Y_2 + Y_3, Y_4)$.

   c) Hallar la probabilidad puntual de la variable aleatoria $Y_2 + Y_3$. ¿Se obtiene información adicional a la contenida en la distribución de $Y_2 + Y_3$ si se calcula además la distribución del vector aleatorio $(Y_2 + Y_3, Y_1 + Y_4)$?¿Por qué?

8. *a*) El número de personas que ingresa por día a un cierto banco es una variable aleatoria de Poisson de parámetro λ. Cada persona que entra tiene probabilidad p de ser hombre y $1-p$ de ser mujer. Mostrar que el número hombres y de mujeres que ingresan por día a dicho banco son variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros λp y $\lambda(1-p)$ respectivamente.

   b) Recíprocamente, supongamos que el número de hombres y de mujeres que ingresan a dicho banco banco por día son variables aleatorias de Poisson independientes. ¿Cuál es la distribución del número total de personas que ingresan al banco por día?

   c) El número de hombres y mujeres que ingresan por día a un cierto banco son variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros 2 y 2,5 respectivamente. Sabiendo que en un determinado día ingresaron únicamente dos personas al banco, calcular la probabilidad de que hayan sido un hombre y una mujer.

9. Sea (X, Y) un vector aleatorio absolutamente continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(3y+x) & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

   Hallar k, f_X, f_Y, F_X, F_Y, $P\left(X < \frac{Y}{3}\right)$ y $P(X^2 - Y^2 = 3)$.

10. Dada una probabilidad P definida sobre $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ definimos su soporte como el conjunto

$$\operatorname{sop}(P) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : P\big(Q_\varepsilon(x)\big) > 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0\right\}$$

$$\text{donde } Q_\varepsilon(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^d : \max_{1\le k\le d} |x_k - y_k| < \varepsilon\right\}.$$

[1] Notar que este ejercicio responde a la pregunta de si la estrategia que emplea la NBA para decidir el campeón de un torneo mediante una serie de playoffs (es decir, se declara campeón al mejor de 7 partidos) favorece al mejor de los equipos o, por el contrario, tiende a beneficiar al menos capacitado, con respecto a la estrategia de jugar una única final. Esto es dejando la facturación de lado, claro está.

a) Sea $X = (X_1, X_2)$ es un vector aleatorio en $\mathbb{R}^2$. Mostrar que si $\operatorname{sop}(P_X) \neq \operatorname{sop}(P_{X_1}) \times \operatorname{sop}(P_{X_2})$ entonces X e Y no son independientes.

b) Mostrar con un ejemplo que no vale necesariamente la recíproca.

c) Probar que si X es un vector aleatorio en $\mathbb{R}^2$ con distribución uniforme en un rectángulo entonces sus coordenadas son variables aleatorias independientes. ¿Qué sucede si X tiene distribución uniforme sobre un pentágono?

11. Tres integrantes A, B y C de un equipo de salto juegan un campeonato. Se asigna al equipo la mejor de las tres distancias obtenidas. El atleta A salta con distribución uniforme en el intervalo $[7, 9]$ mientras que el atleta B lo hace con una distribución absolutamente continua con función de densidad

$$f(x) = \left(\frac{9-x}{2}\right) \mathbb{1}_{[7,9]}(x)$$

y el atleta C lo hace con otra distribución absolutamente continua cuya densidad es

$$f(x) = \left(\frac{x-7}{2}\right) \mathbb{1}_{[7,9]}(x).$$

a) Hallar la distribución de la distancia asignada al equipo.

b) Encontrar la probabilidad de que la distancia sea mayor que 8,2.

12. *a*) Dadas $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F, se definen sus estadísticos de orden $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ como aquellas variables aleatorias que se obtienen ordenando las X_i de manera creciente. En particular, se tiene que

$$X^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$$

$$X^{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Hallar para cada $k = 1, \ldots, n$ la función de distribución acumulada de $X^{(k)}$ en términos de F.

b) Obtener la distribución de $X^{(1)}$ cuando F viene dada por la densidad

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(x) \quad \text{para } \theta \in \mathbb{R}.$$

c) Obtener la distribución de $X^{(n)}$ cuando F es

$$F(x) = \frac{x}{\theta} \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x) + \mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(x) \quad \text{para } \theta \in \mathbb{R}_{>0}.$$

d) Probar que si las X_i tienen distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ entonces para cada $k = 1, \ldots, n$ la variable aleatoria $X^{(k)}$ tiene distribución $\beta(k, n-k+1)$.

13. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivamente.

a) Mostrar que la distribución de $X^{(1)}$ es exponencial. ¿De qué parámetro?

b) Probar que

$$P\left(X_k = \min_{1 \leq i \leq n} X_i\right) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

c) Calcular $P\left(\min_{1 \leq i \leq n} Y_i \leq 2\right)$, donde para cada $i = 1, \ldots, n$ se define $Y_i = [X_i] + 1$.

14. Dos servidores A y B procesan trabajos a medida que van llegando. El tiempo que tarda el servidor A en procesar un trabajo es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$ mientras que el tiempo que tarda el servidor B es una variable aleatoria $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$. Ambos servidores actúan en forma independiente.

   a) Dos trabajos llegan simultáneamente y es atendido uno por A y otro por B. ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor A termine con su trabajo antes que B?

   b) Supongamos que tres trabajos llegan simultáneamente. Uno es atendido por A, otro por B y el tercero queda esperando a que uno de los servidores se libere. Hallar la probabilidad de que el último trabajo en ser atendido sea el último en ser completado si $\lambda_1 = \lambda_2$.
   Sugerencia: Hallar la distribución de $X^{(2)} - X^{(1)}$. ¿Pertenece a una familia conocida?

15. *a*) Sea X una variable aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Probar que $cX \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{c})$ para todo $c > 0$.

   b) Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$. Probar que $X + Y$ y $\frac{X}{X+Y}$ son independientes con distribución $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$ y $\beta(\alpha_1, \alpha_2)$, respectivamente[2].

   c) Teniendo en cuenta el ejercicio 7 de la Práctica 4, deducir que si $Z_1, \ldots, Z_n$ son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar entonces $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ tiene distribución $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$[3].

16. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Sea (ρ, θ) la expresión de (X, Y) en coordenadas polares, es decir $(X, Y) = (\rho \cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$, con $\rho \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

   a) Probar que ρ y θ son variables aleatorias independientes y hallar su distribución. ¿Es alguna de ellas una distribución conocida?¿Cuál?

   b) Hallar la distribución de ρ^2. ¿Es alguna distribución conocida?¿Cuál?

   c) Hallar la probabilidad de que el par (X, Y) caiga en el círculo de centro en el origen y radio σ. Observar que esta probabilidad no depende de σ.

17. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[-1, 1]$.

   a) Sea $U = \frac{X_1+X_2}{2}$. Verificar que

$$f_U(u) = (u+1)\,\mathbb{1}_{(-1,0)}(u) + (1-u)\,\mathbb{1}_{(0,1)}(u).$$

   b) Sea $Z = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$. Usando el ítem anterior verificar que

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{27}{16}(1-|z|)^2 & \text{si } \frac{1}{3} < |z| < 1 \\ \frac{9}{8} - \frac{27}{8}z^2 & \text{si } |z| \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{si } |z| \geq 1. \end{cases}$$

   c) Verificar que f_U es continua y que f_Z es derivable.[4]

[2] En particular, esto muestra que suma de variables aleatorias Gamma independientes tiene distribución Gamma.
[3] Esta distribución particular se conoce como la distribución χ^2 con n grados de libertad y se la nota $\chi^2(n)$.
[4] Esto es una muestra de que la convolución mejora la densidad.

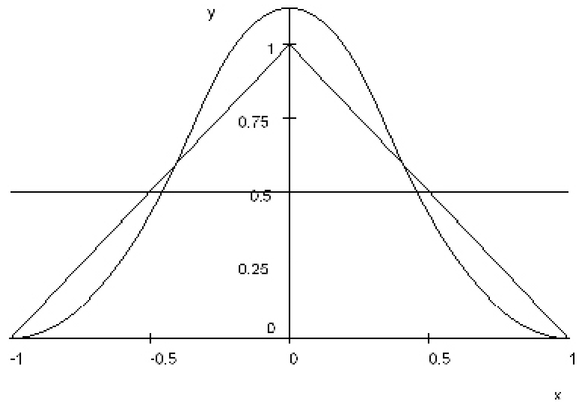

Figura 1: Gráfico de f_U y f_Z, las densidades de U y Z.

18. *a*) Probar que si $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $aX + b \sim N(b + a\mu, a^2\sigma^2)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

    b) Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución normal estándar y $v, w \in \mathbb{R}^2$ dos vectores ortogonales de norma uno. Probar que $V = v \cdot (X, Y)$ y $W = w \cdot (X, Y)$ son variables aleatorias independientes con distribución normal. ¿De qué parámetros?

    c) Deducir que si X e Y son variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $X + Y$ y $X - Y$ son independientes.[5]

    d) Deducir que si $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ son variables aleatorias independientes entonces $aX + bY + c \sim \mathrm{N}(a\mu_1 + b\mu_2 + c, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.[6]

19. Sean Z, X_1 y X_2 variables aleatorias independientes tales que $Z \sim N(0, 1)$, $X_1 \sim \chi^2(n)$ y $X_2 \sim \chi^2(m)$.

    a) Probar que $U = \frac{Z}{\sqrt{X_1/n}}$ tiene distribución t de Student con n grados de libertad cuya densidad viene dada por

    $$f_U(u) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

    b) i. Deducir en particular que si Z_1 y Z_2 son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar entonces el cociente $\frac{Z_1}{|Z_2|}$ tiene distribución $\mathcal{C}(0, 1)$.

    ii. Probar que $\frac{Z_1}{Z_2}$ también tiene distribución $\mathcal{C}(0, 1)$.
    Sugerencia: Mostrar que si Z y W son variables aleatorias independientes tales que Z tiene distribución simétrica respecto del cero entonces los vectores aleatorios (Z, W) y $(-Z, W)$ tienen la misma distribución.

    iii. Concluir que si X es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{C}(0, 1)$ entonces $\frac{1}{X}$ también lo es.

    c) Probar que $V = \frac{X_1/n}{X_2/m}$ tiene distribución F de Snedecor con n y m grados de libertad cuya densidad viene dada por

    $$f_V(v) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} v^{(n/2)-1} \left(1 + \frac{n}{m}v\right)^{-(n+m)/2} 1_{(0,\infty)}(v).$$

[5] De hecho, mostraremos más adelante que vale la equivalencia: si X e Y son variables aleatorias independientes con una misma distribución F entonces $X + Y$ y $X - Y$ son independientes si y sólo si F es una distribución normal.

[6] En particular, esto muestra que suma de variables aleatorias independientes con distribución normal tiene distribución normal.

20. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias absolutamente continuas independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad f y consideremos el vector aleatorio $\overline{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ conformado por sus estadísticos de orden. Mostrar que $\overline{X}$ es absolutamente continuo y que su función de densidad es

$$f_{\overline{X}}(x) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \mathbb{1}_{\{x : x_1 < \dots < x_n\}}(x).$$

21. Sea N un proceso de Poisson. Dados $T > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, mostrar que para cada $0 \leq a < b \leq T$ la variable aleatoria $N_{(a,b]}$ condicionada al evento $\{N_{(0,T]} = n\}$ tiene distribución $\mathcal{B}i(n, p_{b-a,T})$, donde $p_{b-a,T} := \frac{b-a}{T}$. Es decir, para todo $0 \leq k \leq n$ se tiene

$$P(N_{(a,b]} = k | N_{(0,T]} = n) = \binom{n}{k} p_{b-a,T}^{k} (1 - p_{b-a,T})^{n-k}$$

¿Se anima a conjeturar, basándose en este resultado, cuál debería ser la distribución conjunta condicionada al evento $\{N_{(0,T]} = n\}$ de los n puntos del proceso de Poisson sobre el intervalo $[0, T]$?

22. Sea $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[a, b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \min\{U_1, \dots, U_n\} \qquad \text{y} \qquad Z_n = \max\{U_1, \dots, U_n\}.$$

   a) Hallar los límites en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

   b) Hallar los límites en distribución de las sucesiones $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = n(Y_n - a) \qquad \text{y} \qquad W_n = n(b - Z_n).$$

23. Sean X e Y variables aleatorias. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la variable aleatoria $Z_n = \frac{1}{n} \cdot X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot Y$. Hallar el límite en distribución de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.