

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

PRÁCTICA 8

1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población normal.
 - a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para la media cuando la varianza es conocida.
 - b) Se realiza a 10 pacientes un análisis de sangre y se determina el porcentaje de hemoglobina, obteniéndose $\bar{X} = 12$.
 - i) Hallar un intervalo de confianza para la media verdadera de nivel exacto 0.90, suponiendo que la concentración de hemoglobina se distribuye normalmente y que $\sigma = 0.6$.
 - ii) Si se quisiera que la longitud del intervalo hallado en i) fuera a lo sumo 0.5, ¿a cuántos pacientes debería analizarse?
2. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población normal.
 - a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para la media cuando la varianza es desconocida.
 - b) Repetir la parte i) del ítem b) del Ejercicio 1, suponiendo que la varianza es desconocida y el desvío standard muestral es $s = 0.5$.
3. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población normal.
 - a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para la varianza cuando la media es conocida.
 - b) En un aserradero se cortan varillas de madera cuya longitud es una v.a. con distribución normal. Se miden 25 varillas elegidas al azar, obteniéndose $\bar{X} = 180$ cm y $s = 10$ cm. Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto 0.90 para la varianza verdadera, suponiendo que $\mu = 185$.
4. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población normal.
 - a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para la varianza cuando la media es desconocida.
 - b) Repetir el ítem b) del Ejercicio 3 suponiendo que μ es desconocida.
5. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población $\mathcal{E}(\lambda)$.
 - a) Probar que $2\lambda \sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución χ_{2n}^2 .
 - b) Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel exacto $1 - \alpha$.
 - c) ¿Cuál sería el intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para $E(X_1)$? ¿Cuál es su longitud esperada?
 - d) Aplicar b) a los datos del Ejercicio 5 a) de la Práctica 7, con nivel $1 - \alpha = 0.95$.
 - e) Hallar un intervalo de nivel asintótico $1 - \alpha$ para λ .

6. Una muestra aleatoria de 1000 votantes es encuestada respecto a cierta propuesta política. Como resultado, 200 están de acuerdo con la propuesta, 600 se oponen y 200 están indecisos.

- a) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.90 para la proporción de votantes que se oponen a la propuesta.
- b) ¿Cuántos votantes deberían encuestarse para que la longitud del intervalo obtenido fuese menor o igual que 0.02?

7. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población $Bi(k, \theta)$.

- a) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para θ , siendo k conocido.
- b) Encontrar una cota superior para la longitud del intervalo hallado en a).

8. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población $\mathcal{P}(\lambda)$.

- a) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para λ .
- b) Aplicar a) a los datos del Ejercicio 5 b) de la Práctica 7, con $\alpha = 0.05$.

9. a) Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{U}[0, \theta]$. Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para θ .

SUGERENCIA: Encontrar la distribución de $\max_{1 \leq i \leq n} (X_i) / \theta$.

b) Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población con densidad

$$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta, \infty)}(x)$$

Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para θ .

SUGERENCIA: Encontrar la distribución de $\min_{1 \leq i \leq n} (X_i) - \theta$.

c) (**Opcional**) En los casos a) y b) obtener el intervalo de menor longitud esperada.

10. Sean X_1, \dots, X_n v.a. continuas i.i.d. y con función de densidad dada por $f(x)$. Sea $\tilde{\mu}$ la mediana de la distribución de las X 's, es decir $P(X_i \leq \tilde{\mu}) = \frac{1}{2}$ para todo i .

a) Probar que

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i < \tilde{\mu} \cup \min_{1 \leq i \leq n} X_i > \tilde{\mu}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

b) Deducir que $\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i, \max_{1 \leq i \leq n} X_i\right)$ es un intervalo de confianza para $\tilde{\mu}$ de nivel $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

11. Se seleccionan muestras aleatorias independientes de dos poblaciones distintas y para la media de cada una de las poblaciones se construye un intervalo de confianza de nivel 0.90 (90%).
- a) Calcular la probabilidad de que ninguno de los intervalos contenga al verdadero valor de la media que estima.
 - b) Calcular la probabilidad de que al menos uno de los intervalos no contenga al verdadero valor de la media que estima.
 - c) Generalizar a) y b) al caso de k poblaciones, siendo $k \geq 2$.