OPTIMIZACIÓN - 1er Cuatrimestre 2014

Práctica 3

Teorema de Convergencia Global

Ejercicio 1 Sea la función punto a conjunto en $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{A}(x) = \{y : y^T x \leq b\}$$

en dónde b es una constante fija. ¿Es $\mathbf{A}$ cerrada?

Ejercicio 2 Dadas $\mathbf{A} : X \to Y$ y $\mathbf{B} : Y \to Z$ funciones punto a conjunto. Si $\mathbf{A}$ es cerrada en x, $\mathbf{B}$ es cerrada en $\mathbf{A}(x)$ e Y es compacto, entonces la composición $\mathbf{C}$=$\mathbf{BA}$ es cerrada en x.

Ejercicio 3 Dadas $\mathbf{A} : X \to Y$ una función punto a punto y $\mathbf{B} : Y \to Z$ una funcion punto a conjunto. Si $\mathbf{A}$ es continua en x y $\mathbf{B}$ es cerrada en $\mathbf{A}(x)$, entonces la composición $\mathbf{C}$=$\mathbf{BA}$ es cerrada en x.

Ejercicio 4 Muestre que si $\mathbf{A}$ es continua punto a punto, el Teorema de Convergencia Global es válido aun sin la hipótesis que todos los puntos x_k están contenidos en un conjunto S compacto.

Orden de Convergencia

Ejercicio 5 Dadas las siguientes sucesiones, decidir con que orden convergen a 0. Si es lineal, analizar el ratio de convergencia.

a) $r_k = a^k$ con $0 < a < 1$.

b) $r_k = a^{2^k}$ con $0 < a < 1$.

c) $r_k = 1/k$.

d) $r_k = (1/k)^k$.

Ejercicio 6 Considere el método iterativo $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k \frac{a}{x_k}\right)$, donde $a > 0$. Asumiendo que el proceso converge, a qué converge y con que orden?

Ejercicio 7 Sea $g \in C^2(\mathbb{R})$ y sea x^* tal que $g(x^*) = 0$, $g'(x^*) \neq 0$. Entonces, si x_0 está suficientemente cerca de x^*, la sucesión x_{k+1} generada por el método de Newton converge a x^* con orden de convergencia al menos 2.

Ejercicio 8 Sea $f(x) = \frac{1}{2}x^t Q x - x^t b$ una función cuadrática, con $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva y sea x^* el único minimizante. En este caso, el método de máximo descenso puede describirse como: Dado x_0,

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{g_k^t g_k}{g_k^t Q g_k}\right) g_k.$$

con $g_k = Qx_k - b$, el gradiente de f.

a) Mostrar que:

$$|x_{k+1} - x^*| = \left(1 - \frac{(g_k^t g_k)^2}{(g_k^t Q g_k)(g_k^t Q^{-1)} g_k)}\right) |x_k - x^*|$$

b) Usando que vale la siguiente desigualdad:

$$\frac{(x^t x)^2}{(x^t Q x)(x^t Q^{-1} x)} \geq \frac{4\lambda_{min}\lambda_{max}}{(\lambda_{min} + \lambda_{max})^2}$$

con $\lambda_{min}(\lambda_{max})$ el autovalor más chico (grande) de Q, probar que

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \left(\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}\right)^2 |x_k - x^*|.$$

Métodos de Descenso

Ejercicio 9 Sea el algoritmo básico de descenso para minimizar una función f sin reestricciones: Dado $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x_k) \neq 0$, elegir $d_k \in \mathbb{R}^n$ dirección de descenso y $t_k > 0$ tales que

$$f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$$

Tomar $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$

a) Mostrar que el algoritmo está bien definido. Es decir que cada vez que $\nabla f(x_k) \neq 0$, es posible encontrar t_k que satisface la condicion de descenso.

b) Mostrar que si $\nabla f(x_k)^t d_k < 0$ entonces d_k es de descenso. Concluir que $d_k = -\nabla f(x_k)$ es dirección de descenso.

c) Implementar el algoritmo.

Ejercicio 10 Si un método de descenso con búsqueda lineal exacta es utilizado para minimizar una función cuadrática $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mostrar que el paso óptimo está dado por:

$$t_k = -\frac{d_k \nabla g(x_k)}{d_k^t H g(x_k) d_k}$$

Ejercicio 11 Para $\delta > 0$ sea la función punto a conjunto $\mathbf{S}^\delta : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{S}^\delta(x, d) = \{y : y = x + \alpha d, \quad 0 \leq \alpha \leq \delta; \quad f(y) = \min_{0 \leq \beta \leq \delta} f(x + \beta d)\}$$

Explicar lo que hace $\mathbf{S}^\delta$ y probar que si f es continua entonces $\mathbf{S}^\delta(x, d)$ es cerrada para todo (x, d).

Ejercicio 12 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $g'(0) < 0$ y $g''(x) < 0$ para todo x. Sea $\alpha \in (0, 1)$, probar que si $x > 0$, entonces $g(x) \leq g(0) + \alpha x g'(0)$.

Ejercicio 13 Sea el algoritmo de descenso con la condición de Armijo y backtracking para la búsqueda Lineal: Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1)$, $\beta > 0$ y $\theta \in (0,1)$.

Dado x_k, el siguiente elemento en la sucesión es elegido de la siguiente manera:

(1) Si $\nabla f(x_k) = 0$ Parar.

(2) Elegir $d_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|d_k\| \geq \beta \|\nabla f(x_k)\|$$
$$\nabla f(x_k)^t d_k \leq -\theta \|\nabla f(x_k)\| \|d_k\|$$

(3) t=1.

(4) Mientras $f(x_k + td_k) > f(x_k) + \alpha t \nabla f(x_k)^t d_k$, elegir un nuevo $t \in [\frac{t}{10}, \frac{9t}{10}]$.

(5) $x_{k+1} = x_k + td_k$. Volver a (1).

Mostrar que el Algoritmo está bien definido e implementarlo. Implementarlo para el siguiente problema:

Ejercicio 14 Probar que dada $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ simétrica, existe $\mu_0 \geq 0$ tal que $A + \mu I$ es Simétrica y Definida Positiva para todo $\mu \geq \mu_0$.

Ejercicio 15 Implemente el siguiente algoritmo que generaliza el método de Newton: Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1)$.

(1) Si $\nabla f(x_k) = 0$ Parar.

(2) Intentar la factorización de Cholesky: $\nabla^2 f(x_k) = LL^t$.

(3) Si (2) es posible obtener $d_k \in \mathbb{R}^n$ resolviendo

$$Lz = -\nabla f(x_k) \qquad Ld_k = z$$

(4) Si (2) no es posible, hacer $d_k = -\nabla f(x_k)$.

(5) Elegir por backtracking t de modo que se satizfaga $f(x_k + td_k) \leq f(x_k) + \alpha t \nabla f(x_k)^t d_k$, hacer $x_{k+1} = x_k + td_k$ y volver a (1).

Ejercicio 16 Implementar un algoritmo que incluya los métodos de los ejercicios anteriores. Generalización de Newton con mejoras en búsqueda local.

Métodos de Direcciones Conjugadas

Ejercicio 17 Considere el problema cuadrático:

$$\begin{cases} \text{mín } \frac{1}{2}x^t Q x - b^t x \\ Ax = c \end{cases}$$

Probar que x^* es mínimo local sí y sólo sí x es un mínimo global.

Ejercicio 18 Sea $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ definida positiva y sean $v_1, ...v_n$ vectores l.i. Mostrar que el método de Gram-Schmidt puede ser usado para generar una secuencia de direcciónes Q-ortogonales desde los v_i. Específicamente, muestre que

$$d_1 = v_1; \qquad d_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{v_{k+1}^t Q d_i}{d_i^t Q d_i} d_i$$

forma un conjunto $Q-$ortogonal.

Ejercicio 19 Sea $f(x) = \frac{1}{2}x^t Q x - b^t x$ con Q DP. Sea x_1 un minimizante de f en un subespacio S_1 que contiene al vector d y sea x_2 un minimizante de f en un subespacio S_2 que contiene a d. Mostrar que si $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $\overline{x} = x_1 - x_2$ es $Q-$ortogonal a d.

Ejercicio 20 Implementar el método del Gradiente Conjugado para minimizar una función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^t Q x - b^t x$:

(1) A partir de un x_0 tomar $d_0 = -g_0 = b - Qx_0$

(2) Para $k = 0, 1, ...n - 1$ hacer:

   (a) Hacer $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ con

$$\alpha_k = \frac{-g_k^T d_k}{d_k^T H(x_k) d_k}, \qquad g_k = Qx_k - b.$$

   (b) Hacer $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$ con

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T Q d_k}{d_k^T Q d_k}.$$

Ejercicio 21 Si definimos $\mathcal{B}_k =< d_0, \cdots, d_{k-1} >$ el subespacio generado por las primeras k direcciones conjugadas, mostrar que el método de las direcciones conjugadas, en cada x_k minimiza la función objetivo tanto en la recta $L : x_{k-1} + \alpha d_{k-1} : \alpha \in \mathbb{R}$, como en la variedad lineal $x_0 + \mathcal{B}_k$.

Ejercicio 22 Implementar el siguiente algoritmo que generaliza el del gradiente conjugado a funciones no cuadráticas:

(1) A partir de un x_0 tomar $g_0 = \nabla f(x_0)^T$ y hacer $d_0 = -g_0$.

(2) Para $k = 0, 1, ...n - 1$ hacer:

   (a) Hacer $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ con $\alpha_k = \frac{-g_k^T d_k}{d_k^T H(x_k) d_k}$.

   (b) Hacer $g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})^T$.

   (c) Si $k \neq n - 1$, hacer $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$ con

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T H(x_k) d_k}{d_k^T H(x_k) d_k}.$$

   y repetir (a).

(3) Hacer $x_0 = x_n$ y volver a (1).