OPTIMIZACIÓN - 1er Cuatrimestre 2014

Práctica 1

Minimización sin restricciones

Ejercicio 1 Encontrar ejemplos donde todos los puntos de Ω sean minimizadores locales pero $f(x) \neq f(y)$ para $x \neq y$.

Ejercicio 2 Encontrar ejemplos de conjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y funciones f que tengan varios minimizadores locales y globales.

Ejercicio 3 Mostrar con ejemplos qué pasa cuando se eliminan de las hipótesis del teorema de Bolzano-Weierstrass las condiciones de continuidad o compacidad.

Ejercicio 4 Probar que si f es continua en $\mathbb{R}^n$ y $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 5 Probar que si f es continua en $\mathbb{R}^n$ y para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq f(x_0)\}$ es acotado, entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 6 Resolver el problema de minimizar $\|Ax - b\|$, donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Considerar todos los casos posibles e interpretar geométricamente.

Ejercicio 7 Sea $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$. Verificar que, para $x = (0, 0)$, $\lambda = 0$ es un minimizador local de $\phi(\lambda) = f(x + \lambda d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^2$, pero x no es un minimizador local de f.

Ejercicio 8 Encontrar ejemplos donde:

1. x^* es minimizador local de f en Ω, pero $\nabla f(x^*) \neq 0$
2. x^* es minimizador local de f en Ω, $\nabla f(x^*) = 0$, pero $\nabla^2 f(x^*)$ no es semidefinida positiva.
3. Ω es abierto, $\nabla f(x^*) = 0$ pero x^* no es minimizador local.
4. Ω es abierto, $\nabla f(x^*) = 0$, $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$, pero x^* no es minimizador local.
5. Ω es abierto, x^* minimizador local estricto, pero $\nabla^2 f(x^*)$ no sea definida positiva.

Ejercicio 9 Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una función cuadrática, $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - b^T x + c$. Escribir un algoritmo que, de existir (y que se asegure que así sea), encuentre el mínimo de f resolviendo un sistema de ecuaciones. Pruébelo para el ejemplo del Ejercicio anterior.

Ejercicio 10 Sea $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$, tal que x^* es el único minimizante de f y que $Hf(x^*)$ es definida positiva.

a) Escribir un algoritmo que, dada una función f buena y un punto x, de como salida $\nabla f(x)$.

b) Escribir un algoritmo que, dada una función f buena y un punto x, de como salida $Hf(x)$.

c) Escribir un programa que dado un punto inicial x_0 aproxime usando el algoritmo de Newton generalizado a x^*. Pruébelo para i) el caso del Ejercicio anterior y ii) para la función $f(x,y,z) = -1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 - 4y + y^2 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4$.

Ejercicio 11 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que minimizar $f(x)$ es equivalente a minimizar $g(f(x))$.

Ejercicio 12 Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un conjunto de funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo Ω. Muestre que la función $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ es convexa en la región en la cual es finita.

Ejercicio 13 Sea γ un función monótona no decreciente de una variable, es decir $r' > r$ implica $\gamma(r') \geq \gamma(r)$, que además es convexa y sea f una función convexa definida en un conjunto convexo. Muestre que la función $\gamma(f)$ definida como $\gamma(f)(x) = \gamma(f(x))$ es convexa sobre Ω.

Ejercicio 14 Sea $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Muestre que una condición necesaria y suficiente para que un punto x^* en el interior de Ω sea un mínimo relativo de f es que $\nabla f(x^*) = 0$ y que f sea localmente convexa en x^*.