OPTIMIZACIÓN - 1er Cuatrimestre 2014

Trabajo Práctico 0 - Estudio de la derivada discreta

Por definición la derivada de una función $f(x)$ es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Las aproximaciones numéricas clásicas son, con $h > 0$:
Diferencias hacia adelante (Forward):

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Diferencias hacia atrás (Backward):

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

La aproximación de la derivada por este método entrega resultados aceptables con un determinado error. Para minimizar los errores se estima que el promedio de ambas entrega la mejor aproximación numérica al problema dado:
Diferencias centrales:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Métodos usando variable compleja:
Lo anterior no se puede hacer en todos los casos en funcionanes de variable compleja. Sin embargo, cuando la función es holomorfa, toma valores reales si es evaluada en la recta real y puede ser evaluada en puntos complejos cercanos a x_0 entonces puede extenderse lo anterior. La primera derivada puede calcularse por la siguiente formula con paso complejo:

$$f'(x_0) \approx \frac{\Im[f(x_0 + ih)]}{h}.$$

Ejercicio 1 Dada la función f y un punto x_0 estudiar cual es el paso optimo para aproximar $f'(x_0)$ usando diferencias forward. Para eso aqui una guia:

1. Crear un vector que representen a los pasos h partiendo por ejemplo desde $h = 1$ o $h = 10^{-1}$ hasta un valor tal que $x_0 + h = x_0$.
2. Crear un vector con las aproximaciones de la derivada dado cada h antrerior.
3. Crear un vector de errores relativos de la aproximacion con el *benchmmark*. En este caso el valor exacto de $f'(x_0)$.
4. Graficar h contra este vector de errores. Convendra trabajar con el logaritmo de los h.
5. Determinar el h que hace minimo el error.

Ejercicio 2 Repetir el análisis anterior para las diferencias centradas.

Ejercicio 3 Repetir el análisis anterior usando paso complejo. Que sucede cuando se realiza el grafico de h contra los errores, o cuando se halla el h que minimiza el error?

Ejercicio 4 El objetivo de este ejercicio es mostrar que aunque se consigan mejores aproximaciones este método es más costoso computacionalmente. Usando la misma función f calcular f' en un intervalo y estudiar el tiempo que demanda realizar la operacion usando los tres métodos anteriores.

1. Tomar como paso h el que resulte optimo en el caso de las diferencias finitas forward y usar el mismo para los 3 métodos.

2. para estudiar el tiempo se puede recurrir al comando *cputime*. Estudiar al menos dos casos en funcion de la cantidad de puntos en el que se evalua la derivada (longitud del vector que represente al intervalo)

Ejercicio 5 BONUS Realizar un estudio similar con la segunda derivada. Trabajar con la aproximacion de diferencias centradas:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2}])$$

1. Probar que usando paso complejo, la aproximacion viene dada por:

$$f''(x_0) \approx \frac{2(f(x_0) - \Re[f(x_0 + ih)])}{h^2}.$$

2. Que se encontro en este caso?

Ejercicio 6 HYPERBONUS Para obtener fórmulas exactas para la segunda derivada con precisión de máquina existe aun una extención más, llamada los números hyper duales. Ver `http://enu.kz/repository/2011/AIAA-2011-886.pdf` para un trabajo acerca del tema (que incluye el análisis anterior con paso complejo y tambien el sitio `http://adl.stanford.edu/hyperdual` para acceder a otras referencias y a codigo hecho para manejar estos números para diferentes lenguajes de programacion.

DATOS

La función a estudiar es:

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{sin(x)^3 + cos(x)^3}}.$$

La derivada exacta viene dada por:

$$f'(x)\frac{e^x\,(3\cos(x) + 5\cos(3x) + 9\sin(x) + \sin(3x))}{8\,(sin(x)^3 + cos(x)^3)^{\frac{3}{2}}}$$

Para los primeros ejercicios tomar $x_0 = 1.5$ con $f'(1.5) = 4.05342789389862$

Tomar el intervalo $[-0.75, 2.35]$ en el ejercicio comparando de comparacion de tiempo para calcular la derivada en un intervalo. Tomar 10.000, 100.000 y 1.000.000 de puntos en el intervalo.