# Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2014

**Práctica 6**

---

## Forma de Jordan

`(Versión actualizada)`

***Notación.*** *Si* $A \in K^{n\times n}$ *entonces* $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

**Ejercicio 1.** Considere la matriz $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

($i$) ¿Cuál es el rango de $A$?

($ii$) Calcule el polinomio característico de $A$. ¿Es esta matriz nilpotente? ¿Puede responder esta pregunta solamente conociendo el polinomio característico?

($iii$) Sabiendo el rango de la matriz, ¿cuáles son las posibilidades de la forma de Jordan de $A$?

($iv$) Hallar una base en la que $A$ este en forma de Jordan.

**Ejercicio 2.** Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \leq j \\ 1 & i > j \end{cases}$$

**Ejercicio 3.**

($i$) Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotente de grado de nilpotencia 3. Determinar las posibles formas de Jordan de A.

($ii$) Sea $B \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ tal que $\chi_B(\lambda) = \lambda^8$ y $rg(B) = 6$. ¿Cuál es la forma de Jordan de B?

**Ejercicio 4.** Considere la matriz $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

($i$) Calcule el rango y el grado de nilpotencia de $A$.

($ii$) Determine la forma de Jordan de $A$.

($iii$) Halle una base en la que $A$ esté en forma de Jordan.

**Ejercicio 5.** Sea $S \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $S = \langle e^x, xe^x, x^2e^x \rangle$ y sea $D : S \to S$ la transformación lineal $D(f) = f'$.

$(i)$ Muestre que $D - I$ es nilpotente.

$(ii)$ Halle una base de Jordan para $D - I$ y concluya una base de Jordan para $D$.

$(iii)$ Calcule (matricialmente) $e^{tD}$.

$(iv)$ Calcule $e^{tD}v$, donde $v$ es alguno de los vectores generadores de $S$; por ejemplo, $v = x^2e^x$. (Observar que si $e^{tD}$ lo calculó en términos matriciales, para calcular $e^{tD}v$ hay que escribir las coordenadas de $v$ en la base donde considero la matriz de $D$).

$(v)$ Escriba $(x + t)^2e^{t+x}$ como combinación lineal de la base (con coeficientes que dependen de $t$). Compare con el item anterior.

**Ejercicio 6.** Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$(i)$ Muestre que $N = A - 2I$ es nilpotente.

$(ii)$ Halle una base de Jordan de $N$, y luego de $A$.

$(iii)$ Calcule $e^{tA}$ (*Sugerencia: Utilice la formula* $e^{D+N} = e^De^N$, *si* $D$ *y* $N$ *conmutan*).

**Ejercicio 7.** Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$(i)$ Calcule el polinomio característico de A.

$(ii)$ Conociendo $\chi_A$, ¿qué dimensión puede tener $Nu(A-3I)$? ¿qué dimensión puede tener $Nu(A-2I)$?

$(iii)$ Muestre que $Nu(A - 2I)^2$ es un subespacio $A$-estable y que está en suma directa con el subespacio de autovalor 3. Calcule $e^{tA}$.