Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2014

Práctica 5

Autovalores y Diagonalización

Ejercicio 1.

(i) Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de las siguientes matrices, considerando por separado $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad (iii)\ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$(iv)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (v)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \qquad (vi)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(vii)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad (viii)\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad (ix)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En todos los casos, $a \in K$.

(ii) Para cada matriz A del inciso anterior, decidir si A es diagonalizable sobre K, para $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$. En caso afirmativo, exhibir una matriz $C \in K^{n\times n}$ y una matriz diagonal $D \in K^{n\times n}$ tales que $A = CDC^{-1}$.

Ejercicio 2. Determinar cuáles matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in K$, y $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, son diagonalizables.

Ejercicio 3.

(i) Sea $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tal que todos sus coeficientes son reales y tal que $\left(\begin{smallmatrix} 1+i \\ 2-i \end{smallmatrix}\right)$ es un autovector correspondiente al autovalor $1 + 3i$. Mostrar que A es diagonalizable, encontrar una base de autovectores y determinar A.

(ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ es un autovector de autovalor $\sqrt{2}$, y tal que χ_A es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Determinar si A es diagonalizable. ¿Cuántas matrices satisfacen estas condiciones?

Ejercicio 4. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.

(i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable, tal que $\mathrm{tr}A = -4$ y los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8. Calcular los autovalores de A.

(*ii*) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ con $\det A = 6$, que tiene a 1 y a -2 como autovalores, y tal que $A - 3I$ tiene a -4 como autovalor. Determinar los restantes autovalores de A.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z).$$

(*i*) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

(*ii*) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(*iii*) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7. Sea $A \in K^{n\times n}$.

(*i*) Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

(*ii*) Probar que si A es inversible entonces 0 no es autovalor de A, y si x es un autovector de A, entonces x es un autovector de A^{-1}.

Ejercicio 8. Sea $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal $D(f) = f'$. Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de D asociado al autovalor λ. Concluir que D tiene infinitos autovalores.

Ejercicio 9. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector (es decir, $f^2 = f$) con $\dim(Im(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular χ_f.

Ejercicio 10. Usando el teorema de Hamilton-Cayley,

(*i*) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(*ii*) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(*iii*) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I.

Ejercicio 11. Dada $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, calcular $\lim_{n\to\infty} A^n$.

Ejercicio 12. Considerar la sucesión de Fibonacci $(a_n)_{n\geq 0}$ dada por $a_0 = a_1 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

(*i*) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.

(*ii*) Mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

(*iii*) Encontrar una matriz inversible P tal que $P.A.P^{-1}$ sea diagonal.

(*iv*) Hallar la fórmula general para el término a_n.

Ejercicio 13. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones (es decir, encontrar una fórmula general para los términos x_n e y_n en función de x_0 e y_0).

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

Sugerencia: use las ideas del ejercicio anterior.

Ejercicio 14. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

Ejercicio 15. Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f'' = f\} = \langle e^x, e^{-x}\rangle$.

Sugerencia: Considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f' = g \\ g' = f \end{cases}$.

Ejercicio 16. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de χ_f es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

Ejercicio 17. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$ y $S \oplus T = V$. Si S y T son f-invariantes, probar que existe una base $\mathcal{B}$ de V y matrices $A_1 \in K^{s\times s}$ y $A_2 \in K^{t\times t}$ tales que

$$|f|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Probar que, en este caso, $\chi_f = \chi_{A_1}\chi_{A_2}$.

Ejercicio 18.

(*i*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3y, 3x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

(*ii*) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es $[f_\theta]_{EE} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Probar que para todo $\theta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

(*iii*) Considerar $f_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. ¿Es diagonalizable? Hallar todos los subespacios f_θ-invariantes.

Ejercicio 19. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(*i*) Probar que el subespacio $\langle (2, -1, 0, 0), (-1, 2, -1, 0)\rangle$ es f_A-invariante.

(*ii*) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $|f_A|_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{pmatrix}$.

Ejercicio 20. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\chi_A(x) = (x - \alpha)(x - z)(x - \overline{z})$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es A y sea $g_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{C}^3$ es A.

(*i*) Probar que existe v_1, autovector de g_A de autovalor α, con todas sus coordenadas reales.

(*ii*) Sea $w = v_2 + iv_3$, con $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, un autovector de g_A asociado al autovalor z. Probar que $w = v_2 - iv_3$ es un autovector de g_A de autovalor z.

(*iii*) Probar que $\langle v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subespacio f_A-invariante de dimensión 2.

(*iv*) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar $|f_A|_{\mathcal{BB}}$.

Ejercicio 21. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Hallar subespacios propios S y T de $\mathbb{R}^3$ f_A-invariantes y tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 22. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$.

(*i*) Hallar, para cada $0 \leq j \leq 5$, un subespacio S_j de $\mathbb{R}^5$ con $\dim(S_j) = j$ que sea f-invariante.

(*ii*) Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.