Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2014

Práctica 4

Transformaciones lineales y Determinantes

• Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Mostrar que las siguientes funciones son transformaciones lineales.

(*i*) $tr : K^{n\times n} \to K$, la función *traza de una matriz.*

(*ii*) $t : K^{n\times n} \to K^{n\times n}$, $t(A) = A^t$.

(*iii*) Para $a \in \mathbb{R}$, $ev_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $ev_a(p) = p(a)$.

(*iv*) $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) = f'$.

(*v*) $I : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$, $I(f) = \int_0^1 f(t)dt$.

(*vi*) $\Phi : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Ejercicio 2. Consideremos $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$. Mostrar que la transformación lineal $t : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $t(A) = A^t$ preserva el producto interno (o sea, $\langle A, B\rangle = \langle t(A), t(B)\rangle$).

Ejercicio 3.

(*i*) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$

(*i*) Decidir si existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$, $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$.

(*iii*) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$, $f(1, 0, 1) = (1, 2, 1)$, $g(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$, $g(2, 2, -1) = (3, -1, 2)$ y $g(3, 2, 1) = (0, 0, 1)$. Determinar si $f = g$.

(*iv*) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

Ejercicio 4. Considerar las transformaciones lineales dadas en (*i*), (*ii*), (*iii*) y (*iv*) del Ejercicio 1.

(*i*) Calcular núcleo e imagen de cada una de ellas.

(*iv*) Determinar, en cada caso, si son o no monomorfismos, epimorfismos y/o isomorfismos.

Ejercicio 5. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 6. En cada uno de los siguientes casos, definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido.

(*i*) $(1, 1, 0) \in Nu(f)$ y $dim(Im(f)) = 1$.

(*ii*) $Nu(f) \cap Im(f) = \langle(1, 1, 2)\rangle$.

(*iii*) $f \neq 0$ y $Nu(f) \subset Im(f)$.

(*iv*) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$.

(*v*) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$.

(*vi*) $Nu(f) \neq \{0\}$, $Im(f) \neq \{0\}$ y $Nu(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

Ejercicio 7.

(*i*) Decidir si puede existir un epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(*ii*) Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. Decidir si existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset Im(f)$.

(*iii*) Decidir si puede existir un monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(*iv*) Sean $S, T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1+x_2+x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1+x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$. Decidir si existe algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$.

(*v*) Hallar (si existe) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $Im(f) = S$ y $Nu(f) = T$ en los siguientes casos.

a) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = \langle(1, 2, 1)\rangle$.

b) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle(1, -2, 1)\rangle$.

Ejercicio 8. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Considere la transformación lineal $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$ definida por $D(f) = f'$. Calcule $Nu(D)$ para cada n. Concluya que D es suryectiva.

Ejercicio 9. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y sea $W_n = \langle e^x, xe^x, x^2e^x, \ldots, x^ne^x\rangle \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (los polinomios de grado menor o igual que n multiplicados por e^x). Considere la transformación lineal $D : W_n \to W_n$ definida por $D(f) = f'$. Calcule $Nu(D)$ para cada n y concluya que D es biyectiva. ¿Es cierto que la primitiva de x^ne^x es de la forma $p(x)e^x$ donde $p(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n?

Ejercicio 10. Consideramos la transformación lineal $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ definida por $D(f) = f'$.

(*i*) Encuentre un subespacio W de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ que sea de dimensión finita, que contenga a $x\cos(x)$ y a $\operatorname{sen}(x)e^x$ y tal que $D(W) \subseteq W$.

(*ii*) Halle una base de W.

(*iii*) Considere la transformación lineal L dada por $L(f) = D^2(f) + 3D(f) - f$. Muestre que $L : W \to W$. Calcule la matriz de L en la base anterior y calcule L^{-1}.

(*iv*) Use el item anterior para hallar una solución particular de la ecuación diferencial $y''+3y'-y = x\cos(x) + \operatorname{sen}(x)e^x$.

Ejercicio 11. Sea M la matriz de una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

(*i*) Muestre que M preserva productos internos si y sólo si sus columnas forman una b.o.n. (si y sólo si $M^tM = Id$).

(*ii*) Muestre que $M^tM = Id$ si y sólo si $MM^t = Id$. Concluya que los vectores columna forman una b.o.n si y sólo si los vectores fila forman una b.o.n.

(*iii*) Usando la multiplicatividad del determinante, muestre que si M preserva productos internos entonces $det(M) = \pm 1$.

Ejercicio 12. Consideremos $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y sea M la matriz de una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$.

(*i*) Muestre que M preserva productos internos si y sólo si sus columnas forman una b.o.n. (si y sólo si $M^*M = Id$).

(*ii*) Muestre que $M^*M = Id$ si y sólo si $MM^* = Id$. Concluya que los vectores columna forman una b.o.n si y sólo si los vectores fila forman una b.o.n.

(*iii*) Usando la multiplicatividad del determinante, muestre que si M preserva productos internos entonces $|det(M)| = 1$.

• Determinantes

Ejercicio 13. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$(i)\ \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (iii)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$iv)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad (v)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad (vi)\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 14.

(*i*) Sean $A \in K^{n\times n}$, $B \in K^{m\times m}$ y $C \in K^{n\times m}$. Consideremos la matriz de bloques $M \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ definida por

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Mostrar que $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

(*ii*) Sean $A_1, \ldots, A_n$ matrices cuadradas (no necesariamente del mismo tamaño) y consideremos la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}.$$

Calcular $\det(M)$.

Ejercicio 15.

(*i*) Sea $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(*ii*) Calcular el determinante de $B \in K^{n\times n}$ siendo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} x & a & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a & a \\ a & a & x & a & a & a \\ a & a & a & x & a & a \\ a & a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & a & x \end{pmatrix}$$

Ejercicio 17. Sea A una matriz cuadrada. Mostrar que existe $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$ para algún λ si y sólo si $v \in Nu(A - \lambda Id)$ si y sólo si $\det(A - \lambda Id) = 0$.

Ejercicio 18.

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Conjeturar el valor del determinante de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Sea

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Mostrar que $\det(A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$.

Ejercicio 20. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$. Sabiendo que $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 21. Sean A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ las matrices $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $A.C = C.B$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

Ejercicio 22. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ y sea $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A + B) = \det(A - B)$. Probar que B es inversible si y sólo si $b_{11} \neq b_{21}$.

Ejercicio 23. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}.$$

(*i*) Probar que el sistema $Ax = 0$ tiene solución única si y sólo si a , b , c y d no son todos iguales a cero.

(*ii*) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

(*iii*) Considere una matriz en $\mathbb{C}^{2\times 2}$ de la forma $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$. Probar que $Ax = 0$ tiene solución única si y sólo si $(z, w) \neq (0, 0)$.