Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2014

Práctica 3

Proyección ortogonal y desigualdad de Cauchy-Schwartz

• Proyecciones ortogonales

Sea V un K-e.v.p.i. (K-espacio vectorial con producto interno, $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), tomemos $0 \neq v_0 \in V$ y S la recta generada por v_0. Queremos encontrar la fórmula de las proyecciones ortogonales asociadas a la descomposición $V = S \oplus S^\perp$. Sabemos que todo $v \in V$ se escribe de manera única como

$$v = v_S + v_{S^\perp}$$

con $v_S \in S$ y $v_{S^\perp} \in S^\perp$. Recordemos que denotamos p_S a la aplicación que a v le asigna v_S (respectivamente $p_{S^\perp}$ es la aplicacion que a v le asigna $v_{S^\perp}$). Como S es la recta generada por v_0, necesariamente $v_S = \lambda v_0$ para cierto λ en K. Muestre lo siguiente:

(i) Si $v = \lambda v_0 + v_{S^\perp}$ entonces, calculando $\langle v, v_0 \rangle$ en ambos miembros, necesariamente

$$\lambda = \frac{\langle v, v_0 \rangle}{||v_0||^2}.$$

(ii) A partir de lo anterior, necesariamente

$$v_{S^\perp} = v - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{||v_0||^2} v_0.$$

Ejercicio 1. Considere (en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual) la recta generada por $(1, 1, 1)$. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, halle las fórmulas

$$p_{(1,1,1)}(x, y, z) = ¿? \qquad\qquad p_{(1,1,1)^\perp}(x, y, z) = ¿?$$

Considere la base canonica de $\mathbb{R}^3$: $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ y calcule $p_{(1,1,1)^\perp}(e_1)$, $p_{(1,1,1)^\perp}(e_2)$ y $p_{(1,1,1)^\perp}(e_3)$. ¿Son linealmente independientes? ¿Pueden serlo? Encuentre a partir de estos vectores una base de $(1, 1, 1)^\perp$.

Ejercicio 2. Considere (en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual) la recta S generada por $v_0 = (2, 3, -1)$. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, halle la fórmula

$$p_{S^\perp}(x, y, z) = ¿?$$

Considere la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y calcule $p_{S^\perp}(e_1)$, $p_{S^\perp}(e_2)$ y $p_{S^\perp}(e_3)$. ¿Son linealmente independientes? ¿Pueden serlo? Encuentre a partir de estos vectores una base del conjunto solución de la ecuación

$$2x + 3y - z = 0$$

Ejercicio 3. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u + 5v &= 0 \\ x + y - 2z - 2u + v &= 0. \end{cases}$$

Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^5$ (con el producto interno usual) generado por $v_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$ y $v_2 = (1, 1, -2, -2, 1)$.

(*i*) ¿Son v_1 y v_2 ortogonales? De lo contrario, halle una base ortogonal de S.

(*ii*) Encuentre la fórmula de la proyección ortogonal a S, y concluya la fórmula de la proyección ortogonal a $S^{\perp}$.

(*iii*) Calcule $p_{S^{\perp}}(e_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, y concluya un sistema de generadores del conjunto solución a las dos ecuaciones originales.

(*iv*) ¿El vector $w = (1, 1, 1, 1, 1)$ pertenece a S? ¿pertenece a $S^{\perp}$? Halle el vector de S más cercano a w, y el vector de $S^{\perp}$ más cercano a w.

Para los ejercicios siguientes, se sugiere tener a mano las primitivas de xe^x, x^2e^x *y* x^3e^x.

Ejercicio 4. Consideremos $V = \mathcal{C}[0, 1]$ con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Consideremos P_3 el subespacio dado por las funciones polinomiales de grado menor o igual a 3 (que tiene por base $\{1, x, x^2, x^3\}$), $P_2 \subset P_3$ el subespacio de los polinomios de grado menor o igual a 2, y P_1 los de grado menor o igual a 1.

(*i*) Halle una b.o.n de P_1, de P_2 y de P_3. Calcule la proyección ortogonal de $f = e^x$ en P_1, P_2, P_3.

(*ii*) Haga el gráfico en $[0, 1]$ de e^x y de los polinomios de grado 1, 2 y 3 obtenidos anteriormente.

Ejercicio 5. Idem al ejercicio anterior pero tomando $V = \mathcal{C}[-1, 1]$ y

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Halle una b.o.n. de P_1, P_2 y P_3 con respecto a este nuevo producto interno, calcule la proyección de $f = e^x$ en P_1, P_2 y P_3, y haga el gráfico en $[-1, 1]$ de e^x y de los polinomios de grado 1,2,3 obtenidos. Compare con los resultados del ejercicio anterior.

• Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Considere, para $a, b, c \in R$ y $a > 0$ la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Muestre que el mínimo de f se da en $x_0 = \frac{-b}{2a}$, donde f toma el valor

$$f(x_0) = -\frac{b^2}{4a} + c.$$

Sean v y w vectores l.i. en un $\mathbb{R}$-e.v.p.i. y definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a través de

$$f(x) = ||v + xw||^2.$$

(*i*) Muestre que $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a = ||w||^2$, $b = 2\langle v, w\rangle$ y $c = ||v||^2$.

(*ii*) Muestre que $f(x) > 0$ para todo x ¿Por qué no puede ser $f(x) = 0$? Si v y w no fueran necesariamente l.i., ¿podría ser $f(x) = 0$ para algún x? ¿Podría ser $f(x) < 0$ para algún x?

(*iii*) A partir de la desigualdad

$$0 < f(x_0) = -\frac{b^2}{4a} + c$$

concluya la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Ejercicio 5. Definiendo como el ángulo entre vectores (no nulos) v y w al único θ tal que

$$\cos(\theta) = \langle \frac{v}{||v||}, \frac{w}{||w||} \rangle,$$

calcule el ángulo entre los vectores $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3)$, y entre $(1, 1, 1)$ y $(1, 0, 0)$.

Ejercicio 6. Sea $\ell^2 = \{(x_1, x_2 \cdots, x_n, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ las sucesiones infinitas de cuadrado sumable. Para $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \cdots, x_n, \cdots) \in \ell^2$, denotemos

$$||\mathbf{x}||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^2$$

Use Cauchy-Schwartz para mostrar que, dados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en ℓ^2, para todo $N \in \mathbb{N}$ vale la siguiente desigualdad para las sumas parciales

$$\sum_{n=1}^{N} |x_i y_i| \leq ||\mathbf{x}|| ||\mathbf{y}||$$

Concluya que (fijados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$) existe $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{n=1}^{N} |x_i + y_i|^2 < C$$

y, por lo tanto, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \ell^2$. Consecuentemente ℓ^2 es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Además, la aplicacion $\langle -, - \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

está bien definida, es decir, es convergente para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en ℓ^2, y es un producto interno en ℓ^2.

Ejercicio 7. (Series de Fourier.) Consideremos $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

Sea V el subespacio de $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ generado por las funciones $\{\cos(nx)\}_{n \geq 0}$ y $\{\text{sen}(nx)\}_{n>0}$.

(i) Muestre que es un conjunto ortogonal. ¿Es ortonormal? Ortonormalícelo.

(ii) Consideremos $\overline{V}$ el subespacio de $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ (que contiene a V) de las funciones que se obtienen como sumas infinitas

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(nx) + \sum_{n>0} b_n \,\text{sen}(nx)$$

con $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ y $\sum_n |b_n|^2 < \infty$. Calcule en general $\langle f, \cos(nx) \rangle$ y $\langle f, \text{sen}(nx) \rangle$ para concluir una fórmula de a_n y b_n en términos de integrales de f.

(iii) Muestre que $\overline{V}$ se puede identificar (como e.v.p.i.) con ℓ^2.