Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2014

Práctica 2

Espacios vectoriales con producto interno

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones definen un producto interno sobre el espacio correspondiente. En caso afirmativo, hallar su matriz en la base canónica de dicho espacio.

(*i*) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$.

(*ii*) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2$.

(*iii*) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K$, $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 - x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_2$, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.

(*iv*) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 - x_1\bar{y}_2$.

(*v*) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1 + i)x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + (1 + i)x_1\bar{y}_2$.

(*vi*) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K$, $\Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_3\bar{y}_3 - x_1\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_1$, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.

(*vii*) $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $\Phi(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f'(1)g'(1)$.

Ejercicio 2.

(*i*) Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ es

$$\Phi(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1 + b)x_3y_3$$

un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

(*ii*) Determinar para qué valores de $c \in \mathbb{R}$ es

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3cx_1y_3 + 3cx_3y_1$$

un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en el K-espacio vectorial V para el cual la base $\mathcal{B}$ resulte ortonormal.

(*i*) $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, 1), (2, -1)\}$, $K = \mathbb{R}$.

(*ii*) $V = \mathbb{C}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, i), (-1, i)\}$, $K = \mathbb{C}$.

(*iii*) $V = \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $K = \mathbb{R}$.

(*iv*) $V = \mathbb{C}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$, $K = \mathbb{C}$.

(*v*) $V = \mathbb{R}_3[X]$ y $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$, $K = \mathbb{R}$.

(*vi*) $V = \mathbb{R}_2[X]$ y $\mathcal{B} = \{1, X - 1, (X - 1)^2\}$, $K = \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.

(*i*) Sea $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el producto interno definido por

$$\Phi_1(x, y) = x_1y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2.$$

Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ_1.

(*ii*) Sea $\Phi_2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ el producto interno definido por

$$\Phi_2(x, y) = x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2y_2.$$

Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el Φ_2.

Ejercicio 5. Probar que las siguientes funciones definen productos internos en los K-espacios vectoriales considerados.

(*i*) $\langle , \rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K$ dada por $\langle A, B\rangle = tr(AB^*)$, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.

(*ii*) $\langle , \rangle : \mathcal{C}[0, 1] \times \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $K = \mathbb{R}$.

(*iii*) $\langle , \rangle : K^n \times K^n \to K$ dada por $\langle x, y\rangle = \bar{y}Q^*Qx^t$ donde $Q \in K^{n\times n}$ es inversible, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.

Ejercicio 6. Sea $\langle , \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ el producto interno en $\mathbb{R}_n[X]$ dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Calcular la matriz de $\langle , \rangle$ en la base $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 7. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes $\mathbb{R}$-subespacios.

(*i*) $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = 0\}$ en $\mathbb{R}^3$, con el producto interno usual.

(*ii*) $S_2 = \langle(1, 2, 1)\rangle$ en $\mathbb{R}^3$, con el producto interno

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1.$$

(*iii*) $S_3 = \langle(i, 1, 1), (-1, 0, i)\rangle$ en $\mathbb{C}^3$, con el producto interno usual.

(*iv*) $S_4 = \langle X^2, X^4 + X^2 + 1\rangle$ en $\mathbb{R}_4[X]$, con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

(*v*) $S_5 = \langle e^x + x\rangle$ en $\langle x, x^2, e^x\rangle \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \tfrac{1}{2}f(1)g(1) + f(\tfrac{1}{2})g(\tfrac{1}{2}).$$

Ejercicio 8. Hallar bases ortonormales para los complementos ortogonales calculados en ejercicio anterior.

Ejercicio 9. Consideremos $\mathbb{R}^4$ con el producto interno usual y sea

$$S = \langle(1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

Hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1, 0)$ y calcular la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S.

Ejercicio 10.

(*i*) Considerar $\mathbb{C}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

(*ii*) Considerar $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\langle 1, X, X^2, X^3\rangle$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1\rangle$.

(*iii*) Considerar $\mathcal{C}[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$. Sea $S = \langle 1, \cos(x), \sin(x)\rangle$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt la base $\{1, \cos(x), \sin(x)\}$. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.