Matemática 2

Primer Cuatrimestre de 2014

Práctica 0

Ecuaciones lineales y matrices

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados sobre $k = \mathbb{R}$. ¿Cambia algo si $k = \mathbb{Q}$? ¿Y si $k = \mathbb{C}$?

$$(i) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{cases} \qquad (ii) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$(iii) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 & = & 6 \end{cases} \qquad (iv) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_2 + x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Determinar los $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema admite solución.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & \alpha_3 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los que cada uno de los siguientes sistemas tenga alguna solución no trivial y, para esos k, resolverlos.

$$(i) \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 & = & 0 \\ (k^2-4)x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad (ii) \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 & = & 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$(i) \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 & = & -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = & 2 \end{cases} \qquad (ii) \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 + 2x_3 - x_4 & = & k+2 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 & = & 2 \\ -4x_3 + k^2x_4 & = & -3k-2 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$(i) \quad \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = & 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = & 2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = & b \end{cases} \qquad (ii) \quad \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 & = & b \\ x_1 + ax_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 & = & -1 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales cuya solución general sea $S = \{(1,1,0) + \lambda(1,2,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 7.

(i) Para cada $n \geq 2$ hallar matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que $AB \neq BA$.

(ii) Encontrar todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $AB = BA$ para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (i.e. A conmuta con **todas** las matrices de 3×3).

Ejercicio 8. Sean A, B y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$. Mostrar, dando un contraejemplo, la falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $B = 0$.

(ii) $A.B = A.C$ y $A \neq 0 \;\Rightarrow\; B = C$.

(iii) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; B.A = 0$.

(iv) $A^j = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$.

(v) $A^2 = A \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $A = I_n$.

Ejercicio 9. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tales que $Ax = Bx$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Probar que $A = B$.

Ejercicio 10. Decidir cuáles de las siguientes matrices son inversibles y exhibir sus inversas.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible y sean $B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Probar las siguientes implicaciones.

(i) $AB = 0 \Rightarrow B = 0$.

(ii) $AB = AC \Rightarrow B = C$.

Ejercicio 12. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones sobre matrices cuadradas.

(i) A, B son inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible.

(ii) A es inversible si y sólo si A^t es inversible.

(iii) A es nilpotente (i.e. existe $j \geq 1$ tal que $A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

Ejercicio 13. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Mostrar que el sistema $Ax = b$ tiene solución única si y sólo si A es inversible.