Matemática 2

Resolución Ejercicio 3/4/14

Ejercicio.

(i) Determinar los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente conjunto es linealmente independiente en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} k-2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & k-1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Extender los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial indicado.

$a)$ $\{2X^2 + X, X^4, -X^2\} \subset \mathbb{R}_5[X]$, $K = \mathbb{R}$.

$b)$ $\{(2, i), (1, 0)\} \subset \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$.

Resolución.

(i) Como las operaciones en el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$ se definen coordenada a coordenada, podemos identificar a la matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ con el vector $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Es decir, las dos primeras coordenadas representan la primera fila de la matriz y las dos segundas la segunda. Podemos entonces usar la técnica de triangulación para verificar la independencia lineal.

$$\begin{pmatrix} k-2 & k & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 2 & -1 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \times F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ k-2 & k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - (k-2)F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -(k-2)(k-1) \\ 2 & -1 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -(k-2)(k-1) \\ 0 & -3 & -1 & -(k-1) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -(k-1)^2 \\ 0 & -3 & -1 & -(k-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \times F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & -1 & 0 & -(k-1)^2 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -(k-1) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + kF_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & -1 & 0 & -(k-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k(k-1)^2 \\ 0 & -3 & -1 & -(k-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & -1 & 0 & -(k-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k(k-1)^2 \\ 0 & 0 & -1 & (k-1)(3k-4) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \times F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 0 & -1 & 0 & -(k-1)^2 \\ 0 & 0 & -1 & (k-1)(3k-4) \\ 0 & 0 & 0 & -k(k-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el conjunto es linealmente independiente si $k \neq 0, 1$.

(ii) a) Queremos extender $S = \{2X^2 + X, X^4, -X^2\}$ a una base de $\mathbb{R}_5[X]$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un polinomio que puede generarse con los elementos de ese conjunto tiene la forma

$$a(2X^2 + X) + bX^4 + c(-X^2) = bX^4 + (2a - c)X^2 + aX.$$

Notemos entonces que cualquier polinomio de la forma $\alpha X^4 + \beta X^2 + \gamma X$ se puede generar; solo debemos tomar $b = \alpha$, $a = \gamma$ y $c = \beta - 2\gamma$. Dicho de otra manera, los polinomios que podemos generar con los elementos de S son los que no tienen término independiente ni aparecen los monomios X^3 y X^5. Por lo tanto, para poder generar todo $\mathbb{R}_5[X]$ necesitamos, en principio, poder generar esos polinomios. Agreguemos entonces 1, X^3 y X^5 al conjunto y veamos que eso es una base. Por un lado, es fácil ver $\langle 2X^2 + X, X^4, -X^2, 1, X^3, X^5 \rangle = \mathbb{R}_5[X]$ pues si $F = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f \in \mathbb{R}_5[X]$ es cualquier polinomio entonces podemos escribir

$$F = \underbrace{bX^4 + dX^2 + eX}_{\text{generado por } S} + \underbrace{aX^5 + cX^3 + f}_{\text{generado por los nuevos}}.$$

Por lo tanto, $\{2X^2 + X, X^4, -X^2, 1, X^3, X^5\}$ genera $\mathbb{R}_5[X]$. Por otro lado, para ver que estos polinomios son linealmente independientes podemos identificar a cada polinomio $F = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f \in \mathbb{R}_5[X]$ con el vector $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ y usar el método de triangulación (que es fácil de resolver).

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 2X^2 + X \\ \leftarrow X^4 \\ \leftarrow -X^2 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow X^3 \\ \leftarrow X^5 \end{array} \end{array}$$

Otra manera de ver que este conjunto es linealmente independiente (y por lo tanto, una base) es el siguiente. Sabemos (o es fácil ver) que $\{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ es una base de $\mathbb{R}_5[X]$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Por lo tanto, $\mathbb{R}_5[X]$ tiene dimensión 6. Si $\{2X^2 + X, X^4, -X^2, 1, X^3, X^5\}$ no fuera un conjunto linealmente independiente entonces algún polinomio sería combinación lineal del resto y podríamos sacarlo y seguiría generando $\mathbb{R}_5[X]$. Esto no puede ser porque $\{2X^2 + X, X^4, -X^2, 1, X^3, X^5\}$ tiene 6 elementos y no podemos generar $\mathbb{R}_5[X]$ con 5 elementos o menos. Por lo tanto, este conjunto debe ser linealmente independiente.

Nota. Una manera más simple de encarar el problema es identificar *de entrada* a cada polinomio de $\mathbb{R}_5[X]$ con el correspondiente vector de $\mathbb{R}^6$. De esta manera, los elementos de S corresponden a los vectores $(0,0,0,2,1,0)$, $(0,1,0,0,0,0)$ y $(0,0,0,-1,0,0)$ y sólo debemos extender el conjunto formado por estos elementos a una base de $\mathbb{R}^6$.

(ii) $b)$ El subespacio generado por $\{(2,i),(1,0)\}$ tiene vectores de la forma

$$a(2,i)+b(1,0)=(2a+b,ai).$$

Como estamos viendo a $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ entonces $2a+b\in\mathbb{R}$ y ai es imaginario puro. Podemos entonces agregar $(i,0)$ (para poder generar vectores con parte imaginaria en la primera coordenada) y $(0,1)$ (para poder generar vectores con parte real en la segunda coordenada). Es fácil ver que $\{(2,i),(1,0),(i,0),(0,1)\}$ es linealmente independiente ya que si $a(2,i)+b(1,0)+c(i,0)+d(0,1)=(0,0)$ entonces $(2a+b+ci,ai+d)=(0,0)$, lo que implica $2a+b+ci=0$ y $ai+d=0$. Un número complejo $\alpha+\beta i$ es cero si y sólo si $\alpha=\beta=0$. Por lo tanto, tenemos que $a=d=c=0$ y $2a+b=0$ (de donde $b=0$). Por lo tanto, el conjunto es linealmente independiente y resulta una base.

Ejercicio extra. Supongamos que queremos extender $\{(2+2i,3+i),(1-i,2+i)\}$ a una base de $\mathbb{C}^2$. Los vectores que generan son de la forma $(2a+b+i(2a-b),3a+2b+i(a+b))$. Si quisiéramos, por ejemplo, conseguir generar un vector con ambas coordenadas reales entonces tendríamos que tomar $2a-b=0$ y $a+b=0$. Pero las únicas soluciones son $a=b=0$. Por lo tanto, no podemos generar vectores con ambas coordenadas reales. En particular, $(1,0)$ y $(0,1)$ no podemos generarlos. Chequeemos que $\{(2+2i,3+i),(1-i,2+i),(1,0),(0,1)\}$ es una base. Alcanza con ver que son linealmente independientes ya que la dimensión de $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es 4. Si planteamos $(0,0)=a(2+2i,3+i)+b(1-i,2+i)+c(1,0)+d(0,1)=(2a+b+i(2a-b),3a+2b+c+i(a+b+d))$ entonces

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ 2a-b=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ a+b+d=0 \end{cases}$$

Triangulando la matriz del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es fácil ver que es compatible determinado. Por lo tanto, sólo tiene la solución trivial $a=b=c=d=0$ y el conjunto resulta linealmente independiente.

Nota. Se puede ver también que no se pueden generar vectores con ambas coordenadas imaginarias puras. De la misma manera, se puede entonces probar que $\{(2+2i,3+i),(1-i,2+i),(i,0),(0,i)\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.