# Matemática 2

Resolución Ejercicio 27/3/14

---

**Ejercicio.** Encontrar un sistema de generadores para el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \ A \text{ conmuta con } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

**Resolución.** Tomemos $A \in S$ y escribamos $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Como $A$ conmuta con $B$ entonces

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & 0 & a+c \\ d+f & 0 & d+f \\ g+i & 0 & g+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 0 & 0 & 0 \\ a+g & b+h & c+i \end{pmatrix}.$$

De esta igualdad obtenemos

$$\begin{cases} a+c &= a+g \\ b+h &= 0 \\ a+c &= c+i \\ d+f &= 0 \\ g+i &= a+g \\ g+i &= c+i \end{cases}$$

de donde $g = c$, $h = -b$, $a = i$ y $f = -d$. Por lo tanto, $A$ es de la forma $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & -d \\ c & -b & a \end{pmatrix}$.
Agrupando las variables independientes tenemos

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & -d \\ c & -b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Respuesta.**

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$