Matemática 2

Resolución Ejercicio 24/4/14

Ejercicio. En cada caso, hallar un producto interno en el K-espacio vectorial V para que la base $\mathcal{B}$ resulte ortonormal.

(*i*) $V = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1+i)\}$.

(*ii*) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $K = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{1+X, X+X^2, 2X\}$

Resolución.

(*i*) Para facilitar las cuentas, escribamos $v = (1,0)$ y $w = (1,1+i)$. Buscamos un producto interno $\langle , \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $\langle v,v\rangle = \langle w,w\rangle = 1$ y $\langle v,w\rangle = 0$. Queremos poder definir el producto entre dos vectores $x, y \in \mathbb{C}^2$. Como $\mathcal{B}$ es una base podemos escribir a cada uno como combinación lineal de v y w:

$$x = a_1 v + b_1 w \tag{1}$$

$$y = a_1 v + b_2 w, \tag{2}$$

donde los coeficientes de la combinación están en $\mathbb{C}$. Por ahora no calculemos estos coeficientes (lo haremos cuando lo necesitemos). Por lo tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= \langle a_1v + b_1w, a_2v + b_2w\rangle \\
&= \langle a_1v, a_2v + b_2w\rangle + \langle b_1w, a_2v + b_2w\rangle) \\
&= \langle a_1v, a_2v\rangle + \langle a_1v, b_2w\rangle + \langle b_1w, a_2v\rangle + \langle b_1w, b_2w\rangle \\
&= a_1\langle v, a_2v\rangle + a_1\langle v, b_2w\rangle + b_1\langle w, a_2v\rangle + b_1\langle w, b_2w\rangle \\
&= a_1\overline{a_2}\underbrace{\langle v,v\rangle}_{=1} + a_1\overline{b_2}\underbrace{\langle v,w\rangle}_{=0} + b_1\overline{a_2}\underbrace{\langle w,v\rangle}_{=0} + b_1\overline{b_2}\underbrace{\langle w,w\rangle}_{=1} \\
&= a_1\overline{a_2} + b_1\overline{b_2}
\end{aligned} \tag{3}$$

Esto nos dice como debemos definir el producto interno a partir de los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 en los que se escriben los vectores x e y en la base $\mathcal{B}$ (o sea, a partir de las coordenadas de los vectores en la base $\mathcal{B}$). Ahora sí, calculemos cómo son dichos coeficientes. Escribamos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. De las ecuaciones (1) y (2) tenemos

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + b_1 \\ x_2 = b_1(1+i) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = a_2 + b_2 \\ y_2 = b_2(1+i) \end{cases}$$

De estos sistemas se calcula

$$\begin{cases} a_1 = x_1 - x_2\frac{(1-i)}{2} \\ b_1 = x_2\frac{(1-i)}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = y_1 - y_2\frac{(1-i)}{2} \\ b_2 = y_2\frac{(1-i)}{2} \end{cases}$$

Reemplazando esta información en la ecuación (3) tenemos

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= (x_1 - x_2\tfrac{(1-i)}{2})\overline{(y_1 - y_2\tfrac{(1-i)}{2})} + x_2\tfrac{(1-i)}{2}\overline{(y_2\tfrac{(1-i)}{2})}\\
&= (x_1 - x_2\tfrac{(1-i)}{2})(\overline{y_1} - \overline{y_2}\tfrac{(1+i)}{2}) + x_2\tfrac{(1-i)}{2}(\overline{y_2}\tfrac{(1+i)}{2})\\
&= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} - \tfrac{(1+i)}{2}x_1\overline{y_2} - \tfrac{(1-i)}{2}x_2\overline{y_1}.
\end{aligned}$$

Para chequear que están bien hechas las cuentas se puede corroborar que, con esta expresión que hallamos, $\langle(1,0),(1,0)\rangle = \langle(1,1+i),(1+1+i)\rangle = 1$ y $\langle(1,0),(1,1+i)\rangle = 0$. Por lo tanto, el producto interno buscado es

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} - \tfrac{(1+i)}{2}x_1\overline{y_2} - \tfrac{(1-i)}{2}x_2\overline{y_1}.$$

Nota. *Notar que la ecuación (3) de más arriba está hecha para vectores v y w cualesquiera, sin importar quién es la base dada $\mathcal{B}$. Es por esto que el razonamiento que hicimos para resolver este ejercicio se puede aplicar siempre (y en espacios de otras dimensiones).*

Otra manera. Podemos intentar armarnos la matriz del producto interno. Va a ser una matriz de 2×2 de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ \bar{b} & d\end{smallmatrix}\right)$ y tiene que verificar:

$$\begin{cases}
(1,0)\begin{pmatrix} a & b\\ \bar{b} & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{1}\\ \bar{0}\end{pmatrix} = 1\\[2ex]
(1,1+i)\begin{pmatrix} a & b\\ \bar{b} & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{1}\\ \overline{1+i}\end{pmatrix} = 1\\[2ex]
(1,0)\begin{pmatrix} a & b\\ \bar{b} & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{1}\\ \overline{1+i}\end{pmatrix} = 0.
\end{cases}$$

Notar que como estamos con $K = \mathbb{C}$ el segundo vector tiene que aparecer con las coordenadas conjugadas. Haciendo las cuentas queda

$$\begin{cases}
a = 1\\[2ex]
a + b(\overline{1+i}) + \bar{b}(1+i) + d(\overline{1+i})(1+i) = 1\\[2ex]
a + b(\overline{1+i}) = 0.
\end{cases}$$

La última ecuación dice $a + b(1-i) = 0$, y reemplazando por $a = 1$ tenemos

$$b = -\frac{1}{1-i} = -\frac{(1+i)}{2}.$$

La segunda ecuación dice

$$a + b(1-i) + \bar{b}(1+i) + d(1-i)(1+i) = 1.$$

Reemplazando con la información de las otras ecuaciones tenemos

$$1 - 1 - 1 + 2d = 1,$$

de donde $d = 1$. Por lo tanto, la matriz del producto interno buscado es $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+i}{2} \\ -\frac{1-i}{2} & 1 \end{pmatrix}$, por lo que

$$\langle x, y\rangle = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+i}{2} \\ -\frac{1-i}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{pmatrix} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} - \frac{(1+i)}{2}x_1\overline{y_2} - \frac{(1-i)}{2}x_2\overline{y_1}.$$

(ii) Usemos coordenadas en la base $\mathcal{E} = \{1, X, X^2\}$ para trabajar en $\mathbb{R}^3$. Tenemos entonces

- $(1 + X)_{\mathcal{E}} = (1, 1, 0)$
- $(X + X^2)_{\mathcal{E}} = (0, 1, 1)$
- $(2X)_{\mathcal{E}} = (0, 2, 0)$

El conjunto $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 0\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, por lo que podemos a hacer la misma cuenta que en la ecuación (3) del ejercicio anterior. Para simplificar las cuentas, escribamos $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 2, 0)$. Como queremos definir $\langle x, y\rangle$ para $x, y \in \mathbb{R}^3$ cualesquiera, los escribimos en la base $\mathcal{B}'$:

$$x = a_1v_1 + b_1v_2 + c_1v_3 \tag{4}$$
$$y = a_2v_1 + b_2v_2 + c_2v_3, \tag{5}$$

por lo que

$$\langle x, y\rangle = \langle a_1v_1 + b_1v_2 + c_1v_3, a_2v_1 + b_2v_2 + c_2v_3\rangle \tag{6}$$

Recordemos que en la ecuación (3) del ejercicio anterior usábamos las propiedades del producto interno para "abrir las sumas" y "sacar los escalares afuera" (conjugados en el caso de la segunda coordenada, aunque en este caso es lo mismo pues $K = \mathbb{R}$). Luego de esto, nos quedaban expresiones $\langle v_i, v_j\rangle$ que valían 0 si $i \neq j$ y valían 1 sin $i = j$ (porque es lo que estamos buscando precisamente, que la base dada sea ortonormal). Por lo tanto, haciendo esta misma cuenta en la expresión del lado derecho de la igualdad (6) obtenemos:

$$\langle x, y\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

De igual manera que el ejercicio anterior, debemos calcular los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ que se usan para escribir un vector general $z \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}'$ (o sea, las coordenadas de z en la base $\mathcal{B}'$). Si $z = (z_1, z_2, z_3)$, se tiene

$$(z_1, z_2, z_3) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 2, 0),$$

de donde

$$\begin{cases} z_1 = \alpha \\ z_2 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ z_3 = \beta. \end{cases}$$

De acá, despejamos $\alpha = z_1$, $\beta = z_2$ y $\gamma = \frac{1}{2}(z_2 - z_1 - z_3)$. Como esta cuenta vale para cualquier vector (z_1, z_2, z_3) entonces los coeficientes a_1, b_1, c_1 en la combinación lineal del vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ en la ecuación (4) y los coeficientes a_2, b_2, c_2 en la combinación lineal del vector $y = (y_1, y_2, y_3)$ en la ecuación (5) son

$$\begin{cases} a_1 = x_1 \\ b_1 = x_2 \\ c_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 - x_3) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = y_1 \\ b_2 = y_2 \\ c_2 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1 - y_3) \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= x_1y_1 + x_2y_2 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1 - x_3)\tfrac{1}{2}(y_2 - y_1 - y_3) \\ &= \tfrac{5}{4}x_1y_1 + \tfrac{5}{4}x_2y_2 + \tfrac{1}{4}x_3y_3 + \tfrac{1}{4}x_1y_3 + \tfrac{1}{4}x_3y_1 - \tfrac{1}{4}x_2y_1 - \tfrac{1}{4}x_1y_2 - \tfrac{1}{4}x_2y_3 - \tfrac{1}{4}x_3y_2. \end{aligned}$$

Hemos hallado el producto interno en $\mathbb{R}^3$ que hace ortogonal a la base $\mathcal{B}'$. ¿Cómo podemos hacer para traducir esto a la base $\mathcal{B}$ en el espacio original $\mathbb{R}_2[X]$? Un vector (x_1, x_2, x_3) representa las coordenadas de un polinomio en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. O sea, (x_1, x_2, x_3) representa al polinomio $f = x_1 + x_2X + x_3X^2$ (e (y_1, y_2, y_3) representa al polinomio $g = y_1 + y_2X + y_3X^2$). Visto como polinomios, ¿qué significa, por ejemplo, la expresión x_1y_1? Es el producto de los términos independientes de f y g. ¿Cómo podemos conseguir los términos independientes a partir de los polinomios? Evaluando en 0, por ejemplo. O sea, $x_1 = f(0)$ e $y_1 = g(0)$. Si ahora queremos escribir x_2 a partir del polinomio f, lo que podemos hacer es derivar $f' = x_2 + 2x_3X$ y vemos que $x_2 = f'(0)$. Por último, si quisiéramos escribir x_3 a partir de f podemos derivar dos veces $f'' = 2x_3$ y obtener $x_3 = \frac{1}{2}f''(0)$ (en realidad, f'' es constante así que, en este caso, da lo mismo evaluarlo en cualquier número). Por lo tanto, con estas identificaciones, podemos definir el producto interno hallado en las coordenadas en $\mathbb{R}^3$ *directamente* en $\mathbb{R}_2[X]$ de la siguiente manera. Si $f, g \in \mathbb{R}_2[X]$ entonces

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle = {} & \tfrac{5}{4}f(0)g(0) + \tfrac{5}{4}f'(0)g'(0) + \tfrac{1}{16}f''(0)g''(0) + \tfrac{1}{8}f(0)g''(0) + \tfrac{1}{8}f''(0)g(0) \\ & - \tfrac{1}{4}f'(0)g(0) - \tfrac{1}{4}f(0)g'(0) - \tfrac{1}{8}f'(0)g''(0) - \tfrac{1}{8}f''(0)g'(0). \end{aligned}$$