Matemática 2

Resolución Ejercicio 20/3/14

Ejercicio. Clasificar el siguiente sistema para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (a+1)x + y + z &= 1 \\ x + (a+1)y + z &= b \\ x + y + (a+1)z &= b^2 \end{cases}$$

Resolución. Armamos la matriz (ampliada) asociada al sistema y triangulamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a+1 & b^2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 1 & a+1 & 1 & b \\ a+1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 0 & a & -a & b-b^2 \\ a+1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - (a+1)F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 0 & a & -a & b-b^2 \\ 0 & -a & -a^2-2a & 1-(a+1)b^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 0 & a & -a & b-b^2 \\ 0 & 0 & -a^2-3a & 1-(a+1)b^2+b-b^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 0 & a & -a & b-b^2 \\ 0 & 0 & -a(a+3) & 1-(a+2)b^2+b \end{array}\right)$$

La diagonal se anula en $a = 0$ (en dos lugares) y $a = -3$.

- Si $a = 0$ queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b^2+b \end{array}\right)$$

  Para que el sistema sea compatible debe suceder (al mismo tiempo) $b - b^2 = 0$ y $-2b^2 + b + 1 = 0$. Como $b - b^2 = (1-b)b$ y $-2b^2 + b + 1 = -2(b + \frac{1}{2})(b-1)$ entonces el sistema es compatible sólo si $b = 1$. Como nos queda una única ecuación (no nula) y tres incógnitas entonces, en este caso, el sistema es (compatible) indeterminado.

- Si $a = -3$ queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b^2 \\ 0 & -3 & 3 & b-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^2+b+1 \end{array}\right)$$

  Para que el sistema sea compatible debe suceder $b^2 + b + 1 = 0$. Pero $b^2 + b + 1 > 0$ para todo $b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, en este caso, el sistema es incompatible para todo b.

Respuesta.

- El sistema es compatible determinado cuando $a \neq 0, -3$ y $b \in \mathbb{R}$ cualquiera.
- El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$ y $b = 1$.
- El sistema es incompatible cuando $a = 0$ y $b \neq 1$, y cuando $a = -3$ y $b \in \mathbb{R}$ cualquiera.