Matemática 2

Solución a ejercicio dejado en clase el 19 Junio

Ejercicios.

(i) Hallar todos los subespacios f-invariantes para el endomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{C}^2$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Sea $F : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ el endomorfismo $F(g)(x) = \int_0^x g(t)dt$. ¿Es el subespacio de todos los polinomios un subespacio F-invariante? ¿Es el subespacio de todas las funciones que se anulan en $x = \frac{1}{2}$ un subespacio F-invariante?

Resolución.

(i) Sea S un subespacio f-invariante de $\mathbb{C}^2$. Como ya sabemos que $\{0\}$ y $\mathbb{C}^2$ son f-invariantes sólo nos resta restringirnos al caso $\dim(S) = 1$. En este caso, S debe estar generado por un autovector de f. Calculando el polinomio característico de A se tiene $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$. Por lo tanto, los autovalores de A son i y $-i$. El autoespacio asociado a $\lambda = i$ es $Nu(iI - A) = Nu \left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{smallmatrix}\right) = \langle (1, -i) \rangle$ y el autoespacio asociado a $\lambda = -i$ es $Nu(-iI - A) = Nu \left(\begin{smallmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{smallmatrix}\right) = \langle (1, i) \rangle$. Por lo tanto, todos los subespacios f-invariantes de $\mathbb{C}^2$ son $\{0\}, \langle (1, -i) \rangle, \langle (1, i) \rangle, \mathbb{C}^2$.

(ii) Sea S el subespacio de los polinomios (vistos como funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$. Para ver si S es F-invariante debemos ver si $F(S) \subset S$. Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in S$ un polinomio. Calculamos

$$F(p)(x) = \int_0^x p(t)dt = \int_0^x (a_n t^n + \cdots + a_0)dt = \left(\tfrac{a_n}{n+1} t^{n+1} + \cdots + a_0 t \right) \Big|_0^x = \tfrac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots + a_0 x.$$

Concluimos entonces que S es F-invariante.

Sea ahora T el subespacio de $\mathcal{C}[0,1]$ conformado por las funciones que se anulan en $x = \frac{1}{2}$. Como $F(g)(x)$ calcula el área bajo el gráfico de g en el intervalo $[0, x]$ podríamos intentar buscar una función que se anule en $x = \frac{1}{2}$ pero que el área bajo su gráfico sea positiva. Por ejemplo, consideremos la función $g(x) = -x + \frac{1}{2} \in T$. Calculamos

$$F(g)(x) = \int_0^x g(t)dt = \int_0^x (-t + \tfrac{1}{2})dt = \left(-\tfrac{1}{2} t^2 + \tfrac{1}{2} t \right) \Big|_0^x = -\tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{2} x.$$

Por lo tanto, $F(g)(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \neq 0$. Luego, T no es F-invariante.