Matemática 2

Corrección - *Resolución Ejercicio 24/4/14*

En la resolución del Ejercicio (*ii*) del archivo correspondiente al Ejercicio 24/4 (Bases ortonormales) **hay un error de cuentas** en el despeje de las soluciones del sistema que aparece en la parte de abajo de la página 3 que afecta el resto de las cuentas. *El error se origina en el primer renglón luego del sistema: dice "$\beta = z_2$" y debe decir "$\beta = z_3$".* Reescribimos, de todas formas, esa parte a continuación, recuadrando donde aparecen las correcciones.

"De igual manera que el ejercicio anterior, debemos calcular los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ que se usan para escribir un vector general $z \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}'$ (o sea, las coordenadas de z en la base $\mathcal{B}'$). Si $z = (z_1, z_2, z_3)$, se tiene

$$(z_1, z_2, z_3) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,2,0),$$

de donde

$$\begin{cases} z_1 = \alpha \\ z_2 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ z_3 = \beta. \end{cases}$$

De acá, despejamos $\alpha = z_1$**,** $\boxed{\beta = z_3}$ **y** $\gamma = \frac{1}{2}(z_2 - z_1 - z_3)$**.** Como esta cuenta vale para cualquier vector (z_1, z_2, z_3) entonces los coeficientes a_1, b_1, c_1 en la combinación lineal del vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ en la ecuación (4) y los coeficientes a_2, b_2, c_2 en la combinación lineal del vector $y = (y_1, y_2, y_3)$ en la ecuación (5) son

$$\begin{cases} a_1 = x_1 \\ \boxed{b_1 = x_3} \\ c_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 - x_3) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = y_1 \\ \boxed{b_2 = y_3} \\ c_2 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1 - y_3) \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1y_1 + \boxed{x_3y_3} + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1 - x_3)\tfrac{1}{2}(y_2 - y_1 - y_3) \\ &= \boxed{\tfrac{5}{4}x_1y_1 + \tfrac{5}{4}x_3y_3 - \tfrac{1}{4}x_2y_1 + \tfrac{1}{4}x_3y_1 - \tfrac{1}{4}x_1y_2 + \tfrac{1}{4}x_2y_2 - \tfrac{1}{4}x_3y_2 + \tfrac{1}{4}x_1y_3 - \tfrac{1}{4}x_2y_3.} \end{aligned}$$

Hemos hallado el producto interno en $\mathbb{R}^3$ que hace ortogonal a la base $\mathcal{B}'$. ¿Cómo podemos hacer para traducir esto a la base $\mathcal{B}$ en el espacio original $\mathbb{R}_2[X]$? Un vector (x_1, x_2, x_3) representa las coordenadas de un polinomio en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. O sea, (x_1, x_2, x_3) representa al polinomio $f = x_1 + x_2X + x_3X^2$ (e (y_1, y_2, y_3) representa al polinomio $g = y_1 + y_2X + y_3X^2$). Visto como polinomios, ¿qué significa, por ejemplo, la expresión x_1y_1? Es el producto de los términos independientes de f y g. ¿Cómo podemos conseguir los términos independientes a partir de los polinomios? Evaluando en 0, por ejemplo. O sea, $x_1 = f(0)$ e $y_1 = g(0)$. Si ahora queremos escribir x_2 a partir del polinomio f, lo que podemos hacer es derivar $f' = x_2 + 2x_3X$ y vemos que $x_2 = f'(0)$. Por último, si quisiéramos escribir x_3 a partir de f podemos derivar dos veces $f'' = 2x_3$ y obtener $x_3 = \frac{1}{2}f''(0)$ (en realidad, f'' es constante así que, en este caso, da lo mismo evaluarlo en cualquier número). Por lo tanto, con estas identificaciones, podemos definir el producto interno hallado en las coordenadas en $\mathbb{R}^3$ *directamente* en $\mathbb{R}_2[X]$ de la siguiente manera. Si $f, g \in \mathbb{R}_2[X]$ entonces

$$\langle f, g\rangle = \boxed{\tfrac{5}{4}f(0)g(0) + \tfrac{5}{16}f''(0)g''(0) - \tfrac{1}{4}f'(0)g(0) + \tfrac{1}{8}f''(0)g(0) - \tfrac{1}{4}f(0)g'(0)}$$
$$\boxed{+\tfrac{1}{4}f'(0)g'(0) - \tfrac{1}{8}f''(0)g'(0) + \tfrac{1}{8}f(0)g''(0) - \tfrac{1}{8}f'(0)g''(0).}\text{''}$$