Matemática 2

Clase práctica de proceso de Gram-Schmidt

Nota. *Esta es la segunda parte de la clase práctica sobre productos internos que comenzó el 24/4. Mirenla por su cuenta y consulten cualquier duda que les surja.*

Proceso de Gram-Schmidt. Consideremos los siguientes productos internos (que vimos en la clase del 24/4).

1. $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi_1(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$.

2. $\Phi_5 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi_5(x, y) = 3x_1\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} - x_1\overline{y_2} - x_2\overline{y_1}$.

Es fácil ver que $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ para Φ_1. ¿Cómo podemos hallar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para Φ_5? Una idea es la siguiente. Fijemos un vector cualquier de $\mathbb{C}^2$, por ejemplo, el $(2, i)$. Este va a ser el primer vector de nuestra base. Ahora, busquemos otro vector (y_1, y_2) que sea ortogonal a él. Planteamos $\Phi_5((2, i), (y_1, y_2)) = 0$. O sea,

$$0 = 3(2\overline{y_1}) + 2i\overline{y_2} - 2\overline{y_2} - i\overline{y_1} = (6 - i)\overline{y_1} + (-2 + 2i)\overline{y_2}.$$

Podemos elegir, por ejemplo, $\overline{y_1} = (-2 - 2i)$ e $\overline{y_2} = -(6 - i)$ (que es una de las elecciones obvias). Entonces, $y_1 = -2 + 2i$ e $y_2 = -6 - i$. Con esto hallamos dos vectores $(2, i)$ e $(-2 + 2i, -6 - i)$ que son ortogonales para Φ_5. Lo que resta para que formen una base ortonormal es que $\Phi_5((2, i), (2, i)) = \Phi_5((-2 + 2i, -6 - i), (-2 + 2i, -6 - i)) = 1$. Para ello, simplemente dividimos a cada uno por su norma **en este producto interno**. O sea, tomamos

$$v = \frac{(2, i)}{||(2, 1)||_5} \qquad w = \frac{(-2 + 2i, -6 - i)}{||(-2 + 2i, -6 - i)||_5},$$

donde $|| \cdot ||_5 = \sqrt{\Phi_5(\cdot, \cdot)}$ representa la norma definida por Φ_5 (o sea, ese 5 que aparece bajo la norma es para recalcar que es la norma respecto del producto interno Φ_5, y no la usual). Calculamos

- $\Phi_5((2, i), (2, i)) = 3(2 \cdot 2) + 2(i(-i)) - 2(-i) - 2i = 14$
- $\Phi_5((-2+2i, -6-i), (-2+2i, -6-i)) = 3((-2+2i)(-2-2i)) + 2((-6-i)(-6+i)) - (-2-2i)(-6+i) - (-6-i)(-2+2i) = 70$

Por lo tanto, $||(2, i)||_5 = \sqrt{14}$, $||(-2 + 2i, -6 - i)||_5 = \sqrt{70}$ y una posible base ortonormal para Φ_5 es

$$\{(\tfrac{2}{\sqrt{14}}, \tfrac{i}{\sqrt{14}}), (\tfrac{-2+2i}{\sqrt{70}}, \tfrac{-6-i}{\sqrt{70}})\}.$$

Notemos que el razonamiento lo hicimos a partir de un vector que fijamos de antemano (en este caso $(2, i)$). Por supuesto, hubiera sido más fácil fijar un vector más "cómodo"; por ejemplo, $(1, 0)$. En este caso, para encontrar el otro vector (y_1, y_2) de la base planteamos $\Phi_5((1, 0), (y_1, y_2)) = 3\overline{y_1} - \overline{y_2} = 0$. Podemos tomar entonces $y_1 = 1$ e $y_2 = 3$, y la base buscada es $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}})\}$, ya que $||(1, 0)||_5 = \sqrt{3}$ y $||(1, 3)||_5 = \sqrt{\Phi_5((1, 3), (1, 3))} = \sqrt{15}$.

El *método de Gram-Schmidt* es una manera de armarse una base ortonormal a partir de otra base dada. La idea general es la siguiente. Supongamos que tenemos una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de un K-espacio vectorial V con un producto interno $\langle , \rangle$. Vamos a armarnos una base de V que sea ortonormal para $\langle , \rangle$. Para esto, podemos primero armarnos una base *ortogonal* $\{w_1, \ldots, w_n\}$ y al final dividir a cada vector w_i por su norma $||w_i||$ para que queden de norma 1. El proceso consiste en ir armándose los vectores w_i de la siguiente manera.

Método de Gram-Schmidt.

1. El primer vector w_1 lo tomamos igual a v_1.
2. El segundo vector w_2 lo tomamos igual a $v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1$.
3. Para el tercero, ponemos $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{||w_2||^2} w_2$.

$\vdots$

n. Siguiendo de igual manera, definimos $w_n = v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1 - \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{||w_2||^2} w_2 \cdots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{||w_{n-1}||^2} w_{n-1}$.

Siguiendo este procedimiento uno obtiene una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Y para obtener una base ortonormal tomamos

$$\left\{ \frac{w_1}{||w_1||}, \frac{w_2}{||w_2||}, \ldots, \frac{w_n}{||w_n||} \right\}.$$

Algunos comentarios. *Para construirnos w_2 tenemos que tener definido w_1; en efecto, la manera de construirnos w_2 es haciendo $v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1$. O sea, es una combinación lineal de v_2 y w_1, donde el coeficiente que acompaña a v_2 es 1 y el que acompaña a w_1 es $\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2}$. De igual manera, para construirnos w_3 lo hacemos como combinación lineal de v_3, w_1 y w_2 (con los coeficientes 1, $\frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{||w_1||^2}$ y $\frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{||w_2||^2}$ respectivamente). Esta construcción es entonces* inductiva*, en el sentido que se armarse un w_i a partir de todos los anteriores. Además, el w_i lo escribimos como combinación lineal de $v_i, w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}$ donde v_i aparece multiplicado por 1 y un w_j (para $1 \leq j \leq i-1$) aparece multiplicado por $-\frac{\langle v_i, w_j \rangle}{||w_j||^2}$.*

Por ejemplo, si encaramos nuevamente el problema de encontrar una base ortonormal para el producto interno $\Phi_5(x, y) = 3x_1\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} - x_1\overline{y_2} - x_2\overline{y_1}$ en $\mathbb{C}^2$, podemos hacer lo siguiente. Consideramos la base canónica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{C}^2$ y usamos Gram-Schmidt. Tenemos,

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, 0) \\ w_2 &= (0, 1) - \frac{\Phi_5((0, 1), w_1)}{||w_1||_5^2} = (0, 1) - \frac{\Phi_5((0, 1), (1, 0))}{||(1, 0)||_5^2}(1, 0) \\ &= (0, 1) - \frac{(-1)}{3}(1, 0) = (\tfrac{1}{3}, 1). \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que dividir a w_1 y w_2 por sus normas (respecto de Φ_5) para que queden de norma 1. Como $||(1, 0)||_5 = \sqrt{3}$ y $||w_2||_5 = \sqrt{5/3}$ entonces la base buscada es

$$\{(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0), (\tfrac{1}{3\sqrt{5/3}}, \tfrac{1}{\sqrt{5/3}})\}.$$

Ejercicios (Resueltos).

(i) Consideremos el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ con el producto interno usual. Ortonormalizar la base $\mathcal{B} = \{(1,0,i),(1,1,2+i),(0,0,1)\}$ usando el método de Gram-Schmidt.

(ii) Consideremos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[X]$.

Resolución.

(i) Llamemos $v_1 = (1,0,i)$, $v_2 = (1,1,2+i)$ y $v_3 = (0,0,1)$ y hallemos los w_1, w_2, w_3 ortonormales aplicando el proceso de Gram-Schmidt. Tenemos

- $w_1 = (1,0,i)$
- $w_2 = (1,1,2+i) - \frac{\langle (1,1,2+i),(1,0,i)\rangle}{||(1,0,i)||^2}(1,0,i)$
  $= (1,1,2+i) - \frac{(2-2i)}{2}(1,0,i) = (i,1,1)$
- $w_3 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,0,i)\rangle}{||(1,0,i)||^2}(1,0,i) - \frac{\langle (0,0,1),(i,1,1)\rangle}{||(i,1,1)||^2}(i,1,1)$
  $= (0,0,1) - \frac{(-i)}{2}(1,0,i) - \frac{1}{3}(i,1,1) = (\frac{i}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$

Finalmente, dividimos a cada w_i por su norma para que queden de norma 1. Calculamos

- $||w_1|| = ||(1,0,i)|| = \sqrt{2}$
- $||w_2|| = ||(i,1,1)|| = \sqrt{3}$
- $||w_3|| = ||(\frac{i}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})|| = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Por lo tanto, la base buscada es

$$\{\tfrac{w_1}{||w_1||}, \tfrac{w_2}{||w_2||}, \tfrac{w_3}{||w_3||}\} = \{(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{i}{\sqrt{2}}), (\tfrac{i}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}), (\tfrac{i}{6\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{3\sqrt{6}}, \tfrac{1}{6\sqrt{6}})\}.$$

(ii) Para hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[X]$ podemos elegir una base cualquier de $\mathbb{R}_2[X]$ y usar luego Gram-Schmidt para ortogonalizarla. Tomemos entonces la base canónica $\{1, X, X^2\}$ y construyamos los polinomios f_1, f_2, f_3 aplicando el proceso de Gram-Schmidt:

- $f_1 = 1$
- $f_2 = X - \frac{\langle X,1\rangle}{||1||^2}1 = X - \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 1^2 dx} = X - \frac{1}{2}$
- $f_3 = X^2 - \frac{\langle X^2,1\rangle}{||1||^2}1 - \frac{\langle X^2, X-\frac{1}{2}\rangle}{||X-\frac{1}{2}||^2}(X - \frac{1}{2})$
  $= X^2 - \frac{\int_0^1 x^2\,dx}{\int_0^1 1^2 dx} - \frac{\int_0^1 x^2(x-\frac{1}{2})dx}{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx}(X - \frac{1}{2})$
  $= X^2 - \frac{1}{3} - \frac{1/12}{1/12}(X - \frac{1}{2})$
  $= X^2 - X + \frac{1}{6}$.

Finalmente, dividiendo por la norma en cada caso obtenemos una base ortonormal para $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\{1, \sqrt{12}X - \sqrt{3}, 180X^2 - 180X + 30\}.$$

Nota. Una de las ventajas de trabajar con una base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es que es sencillo encontrar la escritura de un vector cualquiera como combinación lineal de los elementos de la base. En efecto, si $w \in V$ es un vector cualquier entonces se tiene

$$w = \langle w, v_1 \rangle v_1 + \langle w, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle w, v_n \rangle v_n.$$

O sea, el coeficiente que acompaña a v_i es precisamente $\langle w, v_i \rangle$.

Para pensar. ¿Se les ocurre una demostración de por qué pasa esto?