Matemática 2

Clase práctica de coordenadas y cambio de base

Nota. *Miren este apunte por su cuenta y consulten las dudas que les surjan. Ya pueden terminar la práctica 1.*

Coordenadas en espacios vectoriales de dimensión finita. Ya en varias ocasiones identificamos un polinomio $f = a_nX^n + \cdots + a_0$ de grado n con el vector $(a_n, \cdots, a_0)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ para facilitar las cuentas. Lo que implícitamente estamos haciendo es **fijando** de antemano la base $\mathcal{B} = \{X^n, X^{n-1}, \ldots, X, 1\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ **con ese preciso orden** e identificar el polinomio f con **los coeficientes con los que se escribe f en dicha base** (con dicho orden). Esto es, identificar a f con $(a_n, \ldots, a_0)$ quiere decir que, como combinación lineal de elementos de la base $\mathcal{B}$, a_n multiplica al primer elemento de la base (X^n), a_{n-1} al segundo (X^{n-1}) y así con el resto. El vector $(a_n, \ldots, a_0)$ se llama el *vector de coordenadas de f en la base $\mathcal{B}$* (o, simplemente, las *coordenadas de f en $\mathcal{B}$*). Por ejemplo, las coordenadas de $g = X^3 - 2X + 7$ en la base canónica $\{X^3, X^2, X, 1\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ son $(1, 0, -2, 7)$. Notemos que importa que fijemos de antemano un orden en la base para entender qué coeficiente va con qué elemento de la base. Si, por ejemplo, ordenamos la base como $\{1, X, X^2, X^3\}$ entonces las coordenadas g son $(7, -2, 0, 1)$. Si consideramos la base $\{X^3 - 2X + 7, X^2 + X - 1, -X + 8, -3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ las coordenadas de g son simplemente $(1, 0, 0, 0)$.

Vamos a hacer más precisa la idea de coordenadas en una base para espacios de dimensión finita. Supongamos que tenemos un K-espacio vectorial V de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base **ordenada** de V. Al ser una base, **cualquier** vector de $v \in V$ puede escribirse **de manera única** como combinación lineal con coeficientes en K de los elementos de $\mathcal{B}$:

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

El *vector de coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$* es el vector $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$. De esta manera podemos, eligiendo una base, identificar cualquier K-espacio vectorial de dimensión finita con K^n y trabajar allí. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos.

1. Las coordenadas del vector $(-1, 2) \in \mathbb{R}^2$ en la base ordenada $\mathcal{B} = \{(3, 1), (-1, 1)\}$ son $(\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$, ya que $(-1, 2) = \frac{1}{4}(3, 1) + \frac{7}{4}(-1, 1)$.

2. Si consideramos la base canónica ordenada $\mathcal{B} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ entonces una matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ tiene coordenadas $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Esto coincide con ubicar una fila a continuación de la otra. En general, considerando la base canónica de $K^{n\times m}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   ordenada de esta forma entonces las coordenadas de una matriz $A \in K^{n\times m}$ forman el vector de K^{nm} que se arma ubicando una fila a continuación de la otra.

3. Si consideramos la base ordenada $\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial entonces las coordenadas de un vector $(a+bi, c+di) \in \mathbb{C}^2$ en $\mathcal{B}_1$ son simplemente $(a+bi, c+di) \in \mathbb{C}^2$. Si, en cambio, consideramos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y la base ordenada $\mathcal{B}_2 = \{(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\}$ entonces un vector $(a+bi, c+di) \in \mathbb{C}^2$ tiene coordenadas $(a,c,b,d) \in \mathbb{R}^4$ en la base $\mathcal{B}_2$.

Para pensar. Viendo a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, ¿cuáles son las coordenadas de un vector $(a+bi, c+di) \in \mathbb{C}^2$ en la base $\mathcal{B} = \{(i,0),(0,i)\}$?

Notación. Las coordenadas de un vector v del K-espacio vectorial V en la base $\mathcal{B}$ se suelen notar $(v)_{\mathcal{B}}$. Por ejemplo, para el ejemplo 1 de más arriba escribimos $(-1,2)_{\mathcal{B}} = (\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$.

Ejercicios (Resueltos). Hallar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ en los siguientes casos.

(i) $v = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ en $\mathcal{B} = \{(-1,0,2),(2,2,-3),(0,2,0)\}$, $K = \mathbb{R}$.

(ii) $v = (2-i, 2+3i) \in \mathbb{C}^2$ en $\mathcal{B} = \{(1+i,-i),(i,1-i)\}$, $K = \mathbb{C}$.

(iii) $v = X^5 - 1 \in \mathbb{R}_4[X]$ en $\mathcal{B} = \{1, X, 1+X^2, X+X^3, 1+X^2+X^4, X+X^3+X^5\}$, $K = \mathbb{R}$.

Resolución.

(i) Escribimos a $v = (1,1,1)$ como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$. Llamemos $v_1 = (-1,0,2)$, $v_2 = (2,2,-3)$ y $v_3 = (0,2,0)$.

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v \end{array} \xrightarrow[F_4 \to F_4 + F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 + 2v_1 \\ v_3 \\ v + v_1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_4 \to F_4 - \frac{1}{2}F_2]{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 + 2v_1 \\ v_3 - v_2 - 2v_1 \\ v - \frac{1}{2}v_2 \end{array} \xrightarrow{F_4 \to F_4 + \frac{5}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 + 2v_1 \\ v_3 - v_2 - 2v_1 \\ v - 5v_1 - 3v_2 + \frac{5}{2}v_3 \end{array}$$

de donde $v = 5v_1 + 3v_2 - \frac{5}{2}v_3$. Por lo tanto, $(1,1,1)_{\mathcal{B}} = (5, 3, -\frac{5}{2})$.

(ii) Escribimos a $v = (2-i, 2+3i)$ como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$. Llamamos $v_1 = (1+i, -i)$ y $v_2 = (i, 1-i)$. Planteamos

$$(2-i, 2+3i) = (a+bi)(1+i,-i) + (c+di)(i,1-i) = (a-b-d+(a+b+c)i, b+c+d+(-a-c+d)i)$$

de donde

$$\begin{cases} a - b - d = 2 \\ a + b + c = -1 \\ b + c + d = 2 \\ -a - c + d = 3. \end{cases}$$

La única solución de este sistema es $a = 4$, $b = -5$, $c = 0$ y $d = 7$. Por lo tanto, $(2 - i, 2 + 3i)_{\mathcal{B}} = (4 - 5i, 7i)$.

(iii) Podemos plantear

$$\begin{aligned} X^5 - X^2 - 1 &= a + bX + c(1 + X^2) + d(X + X^3) + e(1 + X^2 + X^4) + f(X + X^3 + X^5) \\ &= a + c + e + (b + d + f)X + (c + e)X^2 + (d + f)X^3 + eX^4 + fX^5 \end{aligned}$$

y resolver el sistema

$$\begin{cases} a + c + e = -1 \\ b + d + f = 0 \\ c + e = -1 \\ d + f = 0 \\ e = 0 \\ f = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $a = 0$, $b = 0$, $c = -1$, $d = -1$, $e = 0$ y $f = 1$. Por lo tanto, $(X^5 - X^2 - 1)_{\mathcal{B}} = (0, 0, -1, -1, 0, 1)$.

Otra manera de resolver este problema es trasladarlo a $\mathbb{R}^6$ usando la base ordenada (auxiliar) $\tilde{\mathcal{B}} = \{X^5, X^4, X^3, X^2, X, 1\}$ y trabajar allí. En este caso tenemos

$$\begin{cases} (X^5 - X^2 - 1)_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, 0, 0, -1, 0, -1) \\ (1)_{\tilde{\mathcal{B}}} = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \\ (X)_{\tilde{\mathcal{B}}} = (0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ (1 + X^2)_{\tilde{\mathcal{B}}} = (0, 0, 0, 1, 0, 1) \\ (X + X^3)_{\tilde{\mathcal{B}}} = (0, 0, 1, 0, 1, 0) \\ (1 + X^2 + X^4)_{\tilde{\mathcal{B}}} = (0, 1, 0, 1, 0, 1) \\ (X + X^3 + X^5)_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0) \end{cases}$$

y el problema se resuelve escribiendo al primer vector como combinación lineal de los seis siguientes en $\mathbb{R}^6$.

Fin de resolución.

Notar que las coordenadas de un vector $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ en la base canónica (ordenada) $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$ coinciden con el mismo vector $(a_1, \ldots, a_n)$. Esto explica el término “canónica”, que quiere decir “adecuada” (la “obvia”). En el caso de $\mathbb{R}[X]$, tiene sentido llamar base canónica a la base $\{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$ ya que las coordenadas de $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ es el vector de sus coeficientes $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Cambio de base. Supongamos que queremos ver cuales son las coordenadas de un vector genérico $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. Planteamos

$$(\alpha, \beta, \gamma) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1) = (a, a + b, a + b + c),$$

de donde

$$\begin{cases} a=\alpha \\ a+b=\beta \\ a+b+c=\gamma. \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son entonces $a=\alpha$, $b=\beta-\alpha$ y $c=\gamma-\beta$ por lo que $(\alpha,\beta,\gamma)_{\mathcal{B}}=(\alpha,\beta-\alpha,\gamma-\beta)$. Notemos que

$$(\alpha,\beta-\alpha,\gamma-\beta)=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix};$$

o sea, multiplicar a un vector por la matriz M nos devuelve las coordenadas de dicho vector en la base $\mathcal{B}$. La matriz M se llama la *matriz de cambio de base* y nos permite calcular mecánicamente la coordenadas de cualquier vector en la base $\mathcal{B}$.

Supongamos ahora que queremos ver cómo se escribe un polinomio genérico $\alpha X^2+\beta X+\gamma$ de $\mathbb{R}_3[X]$ en la base $\mathcal{B}=\{1+X,2X+X^2,2X^2-1\}$. Para poder armarnos una matriz de cambio de base en este caso necesitamos primero pasar a los polinomios a coordenadas en la base canónica $\mathcal{E}=\{X^2,X,1\}$ para pasar a trabajar en $\mathbb{R}^3$ (donde tiene sentido multiplicar una matriz por un vector). Por lo tanto, escribimos $(\alpha X^2+\beta X+\gamma)_{\mathcal{E}}=(\alpha,\beta,\gamma)$, $(1+X)_{\mathcal{E}}=(0,1,1)$, $(2X+X^2)_{\mathcal{E}}=(1,2,0)$ y $(2X^2-1)_{\mathcal{E}}=(2,0,1)$ y planteamos

$$(\alpha,\beta,\gamma)=a(0,1,1)+b(1,2,0)+c(2,0,1),$$

de donde

$$\begin{cases} b+2c=\alpha \\ a+2b=\beta \\ a+c=\gamma. \end{cases}$$

Por lo tanto, $a=-\frac{2}{5}\alpha+\frac{1}{5}\beta+\frac{4}{5}\gamma$, $b=-\frac{6}{5}\alpha+\frac{3}{5}\beta+\frac{2}{5}\gamma$ y $c=\frac{2}{5}\alpha-\frac{1}{5}\beta+\frac{1}{5}\gamma$ y se tiene

$$(\alpha,\beta,\gamma)_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Existe una manera más directa de calcular la matriz de cambio de base. Hagamos el siguiente razonamiento. Supongamos que M es la matriz de cambio de base a una base $\mathcal{B}$ de K^n. Si multiplicamos el primer vector de la base canónica $e_1=(1,0,\dots,0)$ de K^n por M el vector que obtenemos es exactamente la primer columna de M. Por otro lado, multiplicar e_1 por M nos devuelve a dicho vector escrito en coordenadas en la base $\mathcal{B}$. O, sea

$$\begin{cases} M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{ primera columna de } M \\ \\ M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0,\dots,0)_{\mathcal{B}} \end{cases}$$

Esto quiere decir que necesariamente la primer columna de M tiene que estar formada por las coordenadas del primer vector canónico $(1,0,\dots,0)$ en la base $\mathcal{B}$. Con el mismo razonamiento, la segunda columna de M debe ser el vector $(0,1,0,\dots,0)_{\mathcal{B}}$ y la última columna $(0,0,\dots,1)_{\mathcal{B}}$. Por ejemplo, en el primer ejemplo que vimos (la base $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$) es fácil ver que $(1,0,0)=(1,1,1)-(0,1,1)$, por lo que $(1,0,0)_{\mathcal{B}}=(1,-1,0)$ y la primer columna de M tiene que ser este vector. De igual manera, $(0,1,0)=(0,1,1)-(0,0,1)$ (por lo que $(0,1,0)_{\mathcal{B}}=(0,1,-1)$ tiene que ser la segunda columna de M) y, trivialmente, $(0,0,1)_{\mathcal{B}}=(0,0,1)$ tiene que ser la tercera.

Hasta aquí hemos visto como armar una matriz cambio de base de vectores escritos en la base canónica $\mathcal{E}$ (en la que las coordenadas coinciden con el vector) a una base $\mathcal{B}$. **El caso más general** de cambio de base es cuando tenemos un vector escrito en coordenadas en una base $\mathcal{B}$ y queremos pasarlo a coordenadas en una base $\mathcal{B}'$. O sea, tenemos los vectores escritos en la base $\mathcal{B}$ y queremos hallar una matriz que nos devuelva a los vectores escritos en la base $\mathcal{B}'$. En este caso, podemos hacer el razonamiento anterior para armarnos la matriz cambio de base, **con cierta precaución**. Por un lado, si M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ que buscamos entonces multiplicar M por el $e_1=(1,0,\dots,0)$ nos devuelve la primer columna de M. **Pero como estamos considerando a los vectores escritos en las coordenadas de la base** $\mathcal{B}$ entonces el vector $(1,0,\dots,0)$ en este caso representa a $(1,0,\dots,0)_{\mathcal{B}}$; es decir, representa al primer vector de la base $\mathcal{B}$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{cases} M\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \text{ primera columna de } M \\[2ex] M \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}_{\text{primer vector de la base } \mathcal{B}} = (1,0,\dots,0)_{\mathcal{B}'} \end{cases}$$

Por lo tanto, en la primer columna de M van a ir las coordenadas del primer vector de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$. El mismo razonamiento vale para el resto de las columnas: en la segunda van a ir las coordenadas del segundo vector de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$ y en la última columna las del último vector en la base $\mathcal{B}'$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^3$ consideremos las bases $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ y $\mathcal{B}'=\{(1,0,-1),(0,-1,0),(-1,1,0)\}$ y calculemos la matriz M de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. En la primer columna de M debemos poner al primer vector de la base $\mathcal{B}$ (es decir $(1,1,1)$) escrito en las coordenadas de la base $\mathcal{B}'$. Planteamos

$$(1,1,1)=a(1,0,-1)+b(0,-1,0)+c(-1,1,0)$$

de donde $a=-1$, $b=-3$ y $c=-2$. Por lo tanto, $(1,1,1)_{\mathcal{B}'}=(-1,-3,-2)$. De la misma manera, hallamos que $(0,1,1)_{\mathcal{B}'}=(-1,-2,-1)$ y $(0,0,1)_{\mathcal{B}'}=(-1,-1,-1)$. Por lo tanto,

$$M=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ (1,1,1)_{\mathcal{B}'} & (0,1,1)_{\mathcal{B}'} & (0,0,1)_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

Notación. La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}'$ se nota $C(\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Ejercicios (Resueltos). Hallar la matriz de cambio de base en los siguientes casos.

(i) $\mathcal{B} = \{(1+i, -i), (i, 1-i)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(i, 0), (0, i)\}$ en $\mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{C}$.

(iii) $\mathcal{B} = \{1, X, 1+X^2, X+X^3\}$ y $\mathcal{B}' = \{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$ en $\mathbb{R}_3[X]$, $K = \mathbb{R}$.

Resolución.

(i) Para la primera columna de $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ debemos escribir al primer vector $(1+i, -i)$ de $\mathcal{B}$ en las coordenadas de $\mathcal{B}'$. Como $-i(i, 0) = (1, 0)$ y $-i(0, i) = (0, 1)$ entonces podemos hacer la siguiente cuenta:

$$\begin{aligned}(1+i, -i) &= (1+i)(1,0) + (-i)(0,1) = (1+i, -i) = (1+i)[(-i)(i,0)] + (-i)[(-i)(0,i)] = \\ &= (1+i)(-i)(i,0) + (-i)^2(0,i) = (1-i)(i,0) + (-1)(0,i)\end{aligned}$$

por lo que $(1+i, -i)_{\mathcal{B}'} = (1-i, -1)$. De la misma manera calculamos que $(i, 1-i)_{\mathcal{B}'} = (1, -1-i)$. Por lo tanto,

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix}.$$

(ii) Se puede ver “a ojo” que

$$\begin{cases} (1)_{\mathcal{B}'} = (1, 0, 0, 0) \\ (X)_{\mathcal{B}'} = (-1, 1, 0, 0) \\ (1+X^2)_{\mathcal{B}'} = (1, -1, 1, 0) \\ (X+X^3)_{\mathcal{B}'} = (-1, 1, -1, 1) \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{array}{c} C(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \nearrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ {\scriptstyle (1)_{\mathcal{B}'}} & {\scriptstyle (X)_{\mathcal{B}'}} & {\scriptstyle (1+X^2)_{\mathcal{B}'}} & {\scriptstyle (X+X^3)_{\mathcal{B}'}} \end{array} \end{array}$$

En los casos en los que no se ve a ojo (como suele suceder en general) uno simplemente hace la cuenta para encontrar las coordenadas en una base. Por ejemplo, para el vector $X + X^3$ planteamos

$$\begin{aligned} X + X^3 &= a(1) + b(1+X) + c(1+X+X^2) + d(1+X+X^2+X^3) \\ &= (a+b+c+d) + (b+c+d)X + (c+d)X^2 + dX^3 \end{aligned}$$

de donde $d = 1$, $c = -1$, $b = 1$ y $a = -1$. Entonces, $(X+X^3)_{\mathcal{B}'} = (-1, 1, -1, 1)$ (ver la última columna de $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ arriba).

Para pensar. Aunque haya que hacer más cuentas, vuelva a encontrar las coordenadas de $X + X^3$ en la base $\mathcal{B}'$ pero pasando primero el problema a $\mathbb{R}^4$ usando coordenadas en la base canónica $\{1, X, X^2, X^3\}$.

| **Fin de resolución.**

Supongamos que tenemos la matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y que queremos encontrar la matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ (o sea, para el otro lado). ¿Cómo se calcula? La matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ recibe un vector v escrito en las coordenadas de la base $\mathcal{B}$ y devuelve (al multiplicarlo por ella) un vector escrito en las coordenadas de la base $\mathcal{B}'$. O sea,

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')(v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{B}'}.$$

Si la matriz $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ fuese inversible, **y lo es siempre**, entonces multiplicando a ambos lados por la inversa obtenemos

$$(v)_{\mathcal{B}} = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1}(v)_{\mathcal{B}'}.$$

O sea que la matriz $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1}$ recibe un vector v escrito en las coordenadas de la base $\mathcal{B}'$ y devuelve un vector escrito en las coordenadas de la base $\mathcal{B}$. Esto es exactamente lo que hace la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Concluimos que $C(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1}$.

Ejemplo. La matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ del Ejercicio 2 de más arriba es

$$C(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para chequear que calculamos bien la inversa debemos ver que las columnas de esta matriz corresponden precisamente con las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ escritos en la base $\mathcal{B}$. Por ejemplo, la última columna dice que $(1 + X + X^2 + X^3)_{\mathcal{B}} = (0, 0, 1, 1)$; es decir, $1 + X + X^2 + X^3 = (1 + X^2) + (X + X^3)$, lo cual es correcto.

Para pensar. ¿Por qué la matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ es siempre inversible?