# Matemática 2

Clase práctica de complemento ortogonal

---

**Nota.** *Esta es la tercera parte de la clase práctica del 24/4. Mirenla por su cuenta y consulten cualquier duda que les surja. Ya pueden terminar la práctica 2.*

---

COMPLEMENTO ORTOGONAL. Supongamos que tenemos $V$ es un $K$-espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ y consideremos $S$ un subespacio de $V$. El **complemento ortogonal** de $S$ es el siguiente subespacio de $V$:

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \;\forall\, v \in S\}.$$

O sea, es el subespacio conformado por todos los vectores $v$ de $V$ tales que $v$ es ortogonal a **todos y cada uno** de los vectores de $S$. Consideremos el siguiente ejemplo. Sea $S = \langle(1, -2)\rangle \subset \mathbb{R}^2$ y consideremos el producto interno $\Phi(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_1$ en $\mathbb{R}^2$ (como $\mathbb{R}$-espacio vectorial). Como todos los vectores de $S$ son de la forma $\alpha(1, -2)$ entonces un vector $z = (z_1, z_2)$ de $\mathbb{R}^2$ está en el complemento ortogonal de $S$ si verifica $\langle(z_1, z_1), \alpha(1, -2)\rangle = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^2$. O sea,

$$0 = 3z_1\alpha + 2z_2(-2\alpha) = 3\alpha z_1 - 4\alpha z_2.$$

Como esto debe suceder para todo $\alpha$ (y sucede trivialmente para $\alpha = 0$) entonces podemos suponer $\alpha \neq 0$ y despejar $3z_1 - 4z_2 = 0$. O sea, $S^{\perp} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3z_1 - 4z_2 = 0\}$. Si queremos hallar los generadores despejamos $z_1 = \frac{4}{3}z_2$, por lo que $S^{\perp} = \langle(\frac{4}{3}, 1)\rangle$. Si chequeamos:

$$\Phi(\alpha(1, -2), \beta(\tfrac{4}{3}, 1)) = \alpha\overline{\beta}\Phi((1, -2), (\tfrac{4}{3}, 1)) = \alpha\overline{\beta}(3 \cdot 1 \cdot \tfrac{4}{3} + 2 \cdot (-2) \cdot 1) = \alpha\overline{\beta} \cdot 0 = 0.$$

**Observaciones importantes.** *Es fácil ver, a partir de las propiedades del producto interno, que si $v$ es ortogonal $w$ entonces $v$ es ortogonal a todos los múltiplos de $w$ y que, si $v$ es ortogonal a $w$ y $z$ a la vez, entonces $v$ es ortogonal a $v + w$.* ***¡Esta es precisamente la razón por la que $S^{\perp}$ es un subespacio!*** *En particular, esto quiere decir que, si tenemos un subespacio dado por generadores $S = \langle v_1, \dots, v_t\rangle$ entonces para buscar el complemento ortogonal alcanza con encontrar los vectores $w$ que son ortogonales a todos y cada uno de los $v_i$; o sea, no hace falta plantear $\langle w, \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_tv_t\rangle$ para todas las posibles combinaciones lineales. En particular, en el ejemplo anterior, alcanzaba con buscar los $(z_1, z_2)$ tales que $\langle(z_1, z_2), (1, -2)\rangle = 0$; y para chequear que el $S^{\perp}$ hallado es ortogonal a $S$ basta con chequear que $(\frac{4}{3}, 1)$ es ortogonal a $(1, -2)$.*

**Ejercicios (Resueltos).** Hallar el complemento ortogonal del $K$-subespacio $S$ en cada caso.

(*i*) $S = \langle(1, i, 1 + i), (i, 1, 0)\rangle$ en el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ con el producto interno usual.

(*ii*) $S = \langle 1 + X, X^2 - 1\rangle$ en en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

**Resolución.**

$(i)$ Buscamos los $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ tales que

$$\begin{cases} \langle (z_1, z_2, z_3), (1, i, 1+i) \rangle = 0 \\ \langle (z_1, z_2, z_3), (i, 1, 0) \rangle = 0 \end{cases}$$

O sea,

$$\begin{cases} 0 = z_1 \overline{1} + z_2 \overline{i} + z_3 (\overline{1+i}) = z_1 - z_2 i + z_3 (1-i) \\ 0 = z_1 \overline{i} + z_2 \overline{1} + z_3 \overline{0} = -z_1 i + z_2 \end{cases}$$

La segunda ecuación dice $z_2 = i z_1$, y reemplazando en la primera, $z_3 = \frac{2}{(1-i)} z_1 = (-1-i) z_1$. Por lo tanto, los vectores buscados son de la forma $(z_1, z_1 i, z_1(-1-i))$; esto es,

$$S^\perp = \langle (1, i, -1-i) \rangle.$$

$(ii)$ Buscamos los polinomios $aX^3 + bX^2 + cX + d$ tales que

$$\begin{cases} \langle aX^3 + bX^2 + cX + d, 1 + X \rangle = 0 \\ \langle aX^3 + bX^2 + cX + d, X^2 - 1 \rangle = 0 \end{cases}$$

O sea,

- $$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^{1} (ax^3 + bx^2 + cx + d)(1+x) dx \\ &= \int_{-1}^{1} (ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + d) dx \\ &= \left( a\frac{x^5}{5} + (a+b)\frac{x^4}{4} + (b+c)\frac{x^3}{3} + (c+d)\frac{x^2}{2} + dx^1 \right) \Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \tfrac{2}{5}a + \tfrac{2}{3}b + \tfrac{2}{3}c + 2d. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^{1} (ax^3 + bx^2 + cx + d)(x^2 - 1) dx \\ &= \int_{-1}^{1} (ax^5 + bx^4 + (c-a)x^3 + (d-b)x^2 - cx - d) dx \\ &= \left( a\frac{x^6}{6} + b\frac{x^5}{5} + (c-a)\frac{x^4}{4} + (d-b)\frac{x^3}{3} - c\frac{x^2}{2} - dx \right) \Bigg|_{-1}^{1} \\ &= -\tfrac{4}{15}b - \tfrac{4}{3}d. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación despejamos $b = -5d$, y reemplazando en la primera, $a = \frac{10}{3}d - \frac{5}{3}c$. Por lo tanto, los polinomios en $S^\perp$ son de la forma

$$(\tfrac{10}{3}d - \tfrac{5}{3}c)X^3 + (-5d)X^2 + cX + d = c(-\tfrac{5}{3}X^3 + X) + d(\tfrac{10}{3}X^3 - 5X^2 + 1).$$

Concluimos que $S^\perp = \langle -\frac{5}{3}X^3 + X, \frac{10}{3}X^3 - 5X^2 + 1 \rangle$.

**Fin Resolución.**

Es fácil ver que se verifican las siguientes propiedades para cualquier subespacio $S$ de un espacio vectorial $V$ con producto interno.

$(i)$ $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

$(ii)$ $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

$(iii)$ $S + S^{\perp} = V$.

En particular, de estas dos propiedades se tiene $S \oplus S^{\perp} = V$.

Distancia de un punto a un subespacio. Supongamos que tenemos un subespacio $S$ de un espacio vectorial $V$ con producto interno. Como $V = S \oplus S^{\perp}$ entonces cualquier vector $v$ de $V$ se escribe **de manera única** como $v = s + t$, con $s \in S$ y $t \in S^{\perp}$. La *proyección ortogonal sobre* $S$, $p_S : V \to V$, es la aplicación que envía $v$ a $s$ (o sea, envía un vector $v$ al único vector de $s$ que se usa para escribir a $v$ como suma de un elemento de $S$ y otro de $S^{\perp}$). La proyección ortogonal $p_S$ tiene la siguiente

**Propiedad.** Dado $v \in V$, el punto de $S$ más cercano a $v$ es precisamente $p_S(v)$.

O sea, la proyección ortogonal nos resuelve el problema de cómo calcular la distancia de un punto a un subespacio. Antes de hacer un ejercicio, recordemos cómo podemos calcular la proyección ortogonal. Tenemos la siguiente

**Observación.** Si $\{w_1, \dots, w_r\}$ es una base **ortonormal** de $S$ entonces

$$p_S(v) = \langle v, w_1\rangle w_1 + \langle v, w_2\rangle w_2 + \cdots + \langle v, w_r\rangle w_r.$$

Notamos que, de manera alternativa, si $\{z_1, \dots, z_r\}$ es una base **ortogonal** (no necesariamente ortonormal), entonces la proyección ortogonal sobre $S$ se puede calcular por

$$p_S(v) = \tfrac{\langle v,z_1\rangle}{||z_1||^2} z_1 + \tfrac{\langle v,z_2\rangle}{||z_2||^2} z_2 + \cdots + \tfrac{\langle v,z_r\rangle}{||z_r||^2} z_r.$$

Recordemos también que la distancia de un vector $v \in V$ a un subespacio $S$ es **la menor de todas las distancias entre** $v$ **y cada vector de** $S$. O sea, $d(v, S) := \mathrm{mín}_{w\in S} ||v - w||$. Dado que $p_S(v)$ es el vector de $S$ más cercano a $v$ entonces se tiene que $d(v, S) = ||v - p_S(v)||$.

**Ejercicio (Resuelto).** Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. Hallar el punto de $S$ más cercado a $(1, -1, 2)$ y calcular la distancia de $(1, -1, 2)$ a $S$.

**Resolución.**

El punto de $S$ más cercano a $(1, -1, 2)$ es $p_S(1, -1, 2)$. Calculemos $p_S$ usando la observación anterior. Para ello, debemos hallar una base ortonormal de $S$. Los vectores de $S$ son de la forma $(x_1, x_2, 2x_1 + 2x_2)$, por lo que $S = \{(1,0,2),(0,1,2)\}$. Usando Gram-Schmidt tenemos

- $w_1 = (1,0,2)$
- $w_2 = (0,1,2) - \frac{\langle(1,0,2)(0,1,2)\rangle}{||(1,0,2)||^2}(1,0,2) = (-\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5})$.

Normalizando (dividiendo por la norma) obtenemos la siguiente base ortonormal para $S$:

$$\{(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}), (-\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3\sqrt{5}})\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_S(1,-1,2) &= \langle(1,-1,2),(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}})\rangle(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}) \\ &\quad + \langle(1,-1,2),(-\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{2}{3\sqrt{5}})\rangle(-\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{2}{3\sqrt{5}}) \\ &= (1,0,2) + (\frac{4}{9}, -\frac{5}{9}, -\frac{2}{9}) = (\frac{13}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{16}{9}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de $S$ más cercano a $(1,-1,2)$ es $(\frac{13}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{16}{9})$. Finalmente, para calcular la distancia de $(1,-1,2)$ simplemente calculamos

$$||(1,-1,2) - ((\frac{13}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{16}{9}))|| = \frac{2}{3}.$$

**Fin Resolución.**

**Comentario importante.** *Se puede probar que, para todo $v \in V$, se tiene la siguiente igualdad:*

$$p_S(v) + p_{S^\perp}(v) = v. \tag{1}$$

*Notemos que, en particular, la distancia de $v$ a $S$ se puede calcular por $d(v,S) = ||p_{S^\perp}(v)||$. En algunas situaciones, es más sencillo calcular $p_{S^\perp}$, por lo que la igualdad (1) nos permite hallar $p_S$ a partir de $p_{S^\perp}$. Por ejemplo, en el ejercicio anterior, $S^\perp = \langle(2,2,-1)\rangle$, ya que pedir $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ es lo mismo que pedir $\langle(x_1,x_2,x_3),(2,2,-1)\rangle = 0$, por lo que $S = \langle(2,2,-1)\rangle^\perp$ (y, por lo tanto, $S^\perp = (\langle(2,2,-1)\rangle^\perp)^\perp = \langle(2,2,-1)\rangle$). Para calcular $p_{S^\perp}$, normalizamos $(2,2,-1)$ para obtener la base ortonormal $\{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})\}$ de $S$ y calculamos*

$$p_{S^\perp}(1,-1,2) = \langle(1,-1,2),(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})\rangle(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}) = (-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}).$$

*Por lo tanto,*

- $p_S(1,-1,2) = (1,-1,2) - p_{S^\perp}(1,-1,2) = (1,-1,2) - (-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}) = ((\frac{13}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{16}{9}))$
- $d((1,-1,2),S) = ||p_{S^\perp}(1,-1,2)|| = ||(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9})|| = \frac{2}{3}$.