Matemática 2

Clase práctica del 10/4

Nota. *La idea es que miren este apunte por su cuenta y nos hagan consultas de las dudas que les surjan. El objetivo es que les sirva de guía para poder resolver los ejercicios de la práctica 1. Vamos a poner la semana que viene (Lunes, Martes y/o Miércoles) alguno/s horario/s para que puedan venir a consultar. Los horarios se los informaremos en la página de la materia este fin de semana.*

Bases y dimensión. Una *base* de un espacio vectorial V es un conjunto de generadores de V linealmente independiente. Es de alguna manera un conjunto de generadores con la mínima cantidad de elementos que puedo conseguir, lo cual es algo deseable porque tenemos que trabajar con menos vectores. La *dimensión* de un espacio vectorial V es la cantidad de vectores en una base (de haber infinitos, la dimensión es *infinita*). Esto está bien definido para el caso finito porque **todas** las bases de un espacio de dimensión finita tienen la misma cantidad de vectores. La siguientes son propiedades naturales de la dimensión.

(i) Si $S \subseteq T$ entonces $\dim(S) \leq \dim(T)$.

(ii) Si $S \subseteq T$ y $\dim(S) = \dim(T) < \infty$ entonces $S = T$.

Notemos que (ii) no es cierta en general para espacios de dimensión infinita. Por ejemplo, los subespacios $S = \langle 1, X^2, X^4, X^6, \ldots, X^{2n}, \ldots \rangle$ y $T = \langle 1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n, \ldots \rangle = \mathbb{R}[X]$ de $\mathbb{R}[X]$ verifican $S \subset T$ y $\dim(S) = \infty = \dim(T)$ pero $S \neq T$.

Para pensar. Traten de encontrar un ejemplo de la no validez de (ii) para espacios de dimensión infinita en los siguientes dos casos.

(a) S, T subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (el espacio de las sucesiones de números reales).

(b) S, T subespacios de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (el espacio de las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Nota. *La dimensión de un K-espacio vectorial V suele notarse $\dim_K(V)$ para poner énfasis en que el cuerpo considerado es K. Esto es conveniente en los casos de espacios que pueden ser considerados como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales o como $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Por ejemplo, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2$ y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) = 4$. En caso que el cuerpo K quede claro del contexto, vamos a omitirlo del subíndice.*

Suma de subespacios. Ya sabemos que la intersección de dos subespacios S y T es nuevamente un subespacio pero que la unión, en general, no lo es (Ejercicio 4, Práctica 1). Esto sucede porque puede haber un vector $v \in S$ y un vector $w \in T$ tales que $v+w \notin S \cup T$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, si $S = \langle (1,0) \rangle$ y $T = \langle (0,1) \rangle$ entonces $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin S \cup T$. Por lo tanto, en general tenemos que agregar más vectores a $S \cup T$ para asegurarnos que cada vez que sumamos vectores caiga en el conjunto. La *suma* $S+T$ es un espacio vectorial que se construye entonces agregando las sumas "que faltan" (y **solo** las sumas que faltan) para que suceda esto último. Es fácil ver entonces que $S+T = \{v+w \,|\, v \in S,\, w \in T\}$. Como agregamos sólo las sumas necesarias para construir un subespacios a partir de $S \cup T$ es fácil ver que $S+T$ es el espacio vectorial *más pequeño* que contiene a $S \cup T$. La forma más sencilla de construir $S+T$ es a partir de un sistema de generadores de cada uno: si $S = \langle v_1, \dots, v_n, \dots \rangle$ y $T = \langle w_1, \dots, w_m, \dots \rangle$ entonces $S+T = \langle v_1, w_1, v_2, w_2, \dots \rangle$; o sea, un sistema de generadores de $S+T$ se obtiene directamente de juntar los generadores de S y los de T. Notar que aún si tenemos una base de S y una de T, la unión de las bases **no necesariamente** es una base de $S+T$ (sólo podemos asegurar que es un sistema de generadores).

Es claro que para cualesquiera subespacios S, T de un K-espacio vectorial V sucede que $S \cap T \subseteq S, T \subseteq S+T \subset V$.

Ejercicios (Resueltos). Hallar $S \cap T$ y $S+T$ en los siguientes casos de K-espacios vectoriales.

(i) $S = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,|\, x - iy = 0\}$, $T = \langle (3,-i), (3+i, 1-i) \rangle \subset \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$.

(ii) $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \,|\, X \text{ divide a } f\}$, $T = \langle 1+X, 1+X^2, 1+X^4 \rangle \subset \mathbb{R}[X]$, $K = \mathbb{R}$.

(iii) $S = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,|\, \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$, $T = \langle \sin(x), \cos(x) \rangle \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$.

Resolución.

(i) Para hallar la intersección escribimos un vector de T de manera genérica como

$$a(3,-i) + b(3+i, 1-i) = (3a + 3b + ib, b - i(a+b)). \quad (1)$$

Para que un tal vector también esté en S debe verificar

$$\underbrace{3a + 3b + ib}_{x} - i(\underbrace{b - i(a+b)}_{y}) = 0,$$

de donde $2a + 2b = 0$; es decir, $b = -a$. Esto dice que los vectores de T que están en S son los que tienen $b = -a$ en la expresión (1). O sea, son de la forma $(3a + 3(-a) + i(-a), -a - i(a-a)) = (-ai, -a) = a(-i, -1)$. Por lo tanto, $S \cap T = \langle (i, 1) \rangle$.

Para la suma, busquemos un sistema de generadores de S. Uno podría estar tentado a hacer el siguiente razonamiento: los vectores de S son de la forma $(iy, y) = y(i, 1)$, por lo que $S = \langle (i,1) \rangle$. **El problema con este razonamiento** es que cuando escribimos $y(i,1)$ y pensamos a estos vectores como múltiplos de $(i,1)$ nos estamos olvidando que $y \in \mathbb{C}$ (es una de las coordenadas de un vector en $\mathbb{C}^2$) **mientras** que $K = \mathbb{R}$ (estamos viendo a $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$). O sea, estamos considerando multiplicación por número complejos. **Debemos entonces** hacer el siguiente razonamiento. Escribamos $x = a + bi$ e $y = c + di$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$0 = x - iy = (a + bi) - i(c + di) = a + d + i(b - c),$$

de donde $a = -d$ y $b = c$. Por lo tanto, los vectores de S son de la forma $(-d, di) + (bi, b) = d(-1, i) + b(i, 1)$. Por lo tanto, $\langle(-1, i), (i, 1)\rangle$. Concluimos entonces que $S+T = \langle(-1, i), (i, 1), (3, -i), (3 + i, 1 - i)\rangle$.

(ii) Notemos que S es el subespacio de lo polinomios que tienen término independiente nulo. Por lo tanto, si $a(1+X)+b(1+X^2)+c(1+X^4) = cX^4+bX^2+aX+(a+b+c)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ es un elemento genérico de T, debemos requerir que $a+b+c = 0$ para que también esté en S. Esto quiere decir que $S \cap T$ está generado por lo elementos de la forma $cX^4 + bX^2 + (-b - c)X = b(X^2 - X) + c(X^4 - X)$. Esto es, $S \cap T = \langle X^2 - X, X^4 - X\rangle$.

Para calcular ahora $S + T$, notemos que $S = \langle X, X^2, X^3, \ldots, X^n, \ldots\rangle$, por lo que

$$S + T = \langle 1 + X, 1 + X^2, 1 + X^4, X, X^2, X^3, \ldots, X^n, \ldots\rangle.$$

Ahora, como $1 + X$ y X están en $S + T$ entonces $1 = (1 + X) - X$ también está en $S + T$. Por lo tanto, la base canónica de $\mathbb{R}[X]$ está contenida en $S + T$, y entonces $S + T = \mathbb{R}[X]$.

Nota. *Notemos que como $S \cap T \subset T \subset \mathbb{R}_4[X]$ entonces para calcular la intersección podemos quedarnos con los polinomios de S de grado ≤ 4: $S' = S \cap \mathbb{R}_4[X] = \langle X, X^2, X^3, X^4\rangle$. Haciendo la identificación con vectores de $\mathbb{R}^5$ se tiene entonces que*

$$S' = \langle\underbrace{(0, 0, 0, 1, 0)}_{X}, \underbrace{(0, 0, 1, 0, 0)}_{X^2}, \underbrace{(0, 1, 0, 0, 0)}_{X^3}, \underbrace{(1, 0, 0, 0, 0)}_{X^4}\rangle$$

$$T = \langle\underbrace{(0, 0, 0, 1, 1)}_{1+X}, \underbrace{(0, 0, 1, 0, 1)}_{1+X^2}, \underbrace{(1, 0, 0, 0, 1)}_{1+X^4}.$$

Pasando estos subespacios a ecuaciones tenemos $S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \,|\, x_5 = 0\}$ y $T = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \,|\, x_2 = 0\,, x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$. Por lo tanto, los puntos de $S' \cap T$ son los que verifican todas las restricciones:

$$\begin{cases} x_5 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

O sea, un punto de la intersección tiene la forma $(-x_3 - x_4, 0, x_3, x_4, 0)$, por lo que

$$S' \cap T = \langle\underbrace{(-1, 0, 1, 0, 0)}_{-X^4+X^2}, \underbrace{(-1, 0, 0, 1, 0)}_{-X^4+X}\rangle.$$

Es fácil verificar que este subespacio es el mismo que hallamos con el otro método de resolución (pese a tener distintos generadores). Esto se da porque decidimos despejar x_1 en función de x_3 y x_4 en la última ecuación del sistema de arriba (notar que $x_5 = 0$ por lo que no aparece). Si hubiéramos despejado x_4 en función de x_1 y x_3 en dicha ecuación hubiésemos obtenido el sistema de generadores $\{(1, 0, 0, -1, 0), (0, 0, 1, -1, 0)\}$ que es exactamente el hallado con el otro método.

(iii) Los vectores de T son de la forma $a\sin(x) + b\cos(x)$. Para que estén en S debemos tener $\int_{-1}^{1} a\sin(x) + b\cos(x)dx = 0$. O sea,

$$0 = a\int_{-1}^{1} \sin(x)dx + b\int_{-1}^{1} \cos(x)dx = a(\underbrace{-\cos(1) + \cos(-1)}_{=0}) + b(\underbrace{\sin(1) - \sin(-1)}_{=2sen(1)})$$

$$= 2b\sin(1).$$

Por lo tanto, $b = 0$ y $S \cap T = \langle \sin(x) \rangle$.

Como no es posible conseguir un sistema de generadores de S y ya sabemos que $\sin(x) \in S$ entonces $S + T$ lo dejamos expresado como

$$S + T = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,|\, g(x) = f(x) + a\cos(x) \text{ con } \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \text{ y } a \in \mathbb{R}\}.$$

Este conjunto se lee "las funciones C^∞ que se pueden escribir como suma de una función C^∞ cuya integral sobre el intervalo $[-1, 1]$ es nula y un múltiplo real de la función $\cos(x)$".

Para pensar. ¿Se les ocurre un $\mathbb{R}$-subespacio de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *de dimensión infinita* que esté contenido en $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$?

Fin de resolución.

Teorema de la dimensión de la suma. Notemos que de el hecho que $S \cap T \subseteq S, T \subseteq S + T \subset V$ se tiene en particular que $\dim(S \cap V) \leq \dim(S), \dim(T) \leq \dim(S+T) \leq \dim(V)$. Para espacios de dimensión finita, vale el siguiente teorema.

Teorema. *Si* $S, T \subset V$ *y* $\dim(V) < \infty$ *entonces*

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

Este teorema es muy útil para ahorrar cuentas. Por ejemplo, si tenemos dos subespacios $S, T \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim(S) = 3$ y $\dim(T) = 2$ podemos asegurar que **necesariamente se intersecan** dado que como $\dim(S + T) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ y

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 3 + 2 - \dim(S \cap T) = 5 - \dim(S \cap T)$$

entonces se tiene $5 - \dim(S \cap T) \leq 4$; de donde $\dim(S \cap T) \geq 1$ y no puede ser $\{0\}$.

Cuando $S \cap T = \{0\}$ decimos que la suma $S + T$ es *directa* y lo notamos $S \oplus T$. Notar que, en este caso, $\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T)$. Una propiedad que tiene la suma directa es que cada vector de $S \oplus T$ se escribe *de manera única* como suma de un vector de S y uno de T.