

Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2014

Práctica 10: Conjuntos Computables

1. Probar que el conjunto $\{x \in \mathbb{N} : \text{dominio de } \Phi_x = \emptyset\}$ no es recursivo.
2. Probar que los siguientes conjuntos no son recursivos:
 - a) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \in \text{rango de } \Phi_x\}$.
 - b) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \Phi_x = \Phi_y\}$.
 - c) $\{x \in \mathbb{N} : \text{rango de } \Phi_x \text{ es infinito}\}$.
3. Probar que todo conjunto recursivamente enumerable infinito contiene un subconjunto recursivo infinito.
4. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
 - a) Si B es recursivamente enumerable, entonces B es recursivo o $\mathbb{N} \setminus B$ es recursivo.
 - b) Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos recursivamente enumerables, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es recursivamente enumerable.
5. Probar que si B es recursivamente enumerable y f es una función parcialmente computable entonces $f^{-1}(B)$ es recursivamente enumerable.
6. Probar que las siguientes funciones no son computables.

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_{x,x} = 2x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x = \Phi_y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si imagen } \Phi_x \text{ es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in \text{Dom } \Phi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

7. Decidir si los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:

a) $\{x \in \mathbb{N} : \Phi_x(0) \downarrow\}$.

b) $\{x \in \mathbb{N} : \Phi_x(x) \downarrow\}$.

c) $\{x \in \mathbb{N} : \text{dominio de } \Phi_x = \emptyset\}$.

8. Probar que B es recursivamente enumerable e infinito si y sólo si existe una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva y recursiva tal que el rango f es B .

9. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \in \text{Dom } \Phi_x\}$ es recursivamente enumerable, pero no es recursivo.

10. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : \Phi_x(x) \text{ se puede computar en menos de } x \text{ pasos}\}$ es recursivo.

11. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : \text{el programa con índice } x \text{ tiene menos de } x \text{ líneas}\}$ es recursivo.