Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2014

Práctica 7: Funciones Computables

1. Escribir en S algoritmos para calcular las siguientes funciones aritméticas:

   a) Producto: $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. (Usando suma como macro).

   b) Potencia: $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$. (Usando producto como macro).

2. Demostrar que S computa la función vacía $\emptyset : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

3. Escribir en S algoritmos para calcular las siguientes funciones de decisión:

   a)
   $$\mathit{igual}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

   b)
   $$\mathit{distinto}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases}$$

   c)
   $$\mathit{mayor}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq x_2 \end{cases}$$

   d)
   $$\mathit{menor}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \geq x_2 \end{cases}$$

4. Demostrar que el lenguaje S cumple las siguientes propiedades:

   Propiedad 1:

   a) Computa la función $suc\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, suc(x) = x + 1$.
   b) Computa las proyecciones $P_{in}\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$.
   c) Computa las constantes $C_{kn}\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$.

   Propiedad 2: Si S computa $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y computa $g_i\colon \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k$, entonces S computa la composición:

   $$h(x_1, \ldots, x_r) = f(g_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_r)).$$

   Propiedad 3: Computa la función de decisión $d\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$:

   $$d(x, y, s, t) = \begin{cases} s & \text{si } x = y \\ t & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

5. Escribir un programa que compute la función:

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ \uparrow & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

6. Sea $f(x)$ el mayor número natural tal que $2 \cdot n \leq x$. Escribir un programa que compute a f.

7. Sea $[r]$ la parte entera del número real r. Escribir un programa que compute la función:

   a) $f(x) = [\sqrt{x}]$ b) $f(x) = \begin{cases} [\log_2 x] & \text{si } x \neq 0 \\ \uparrow & \text{si } x = 0 \end{cases}$

8. Escribir un programa que compute la última cifra de un número y otro que compute la primera cifra.

9. Dada una función computable $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, escribir un programa que compute a la función g definida como

   $$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = 1 \\ \uparrow & \text{si } f(x) \neq 1 \end{cases}$$

10. Dada una función computable g, es posible escribir un programa que compute a la función

    $$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } g(x) \uparrow \end{cases}$$

11. Dado un número x se define la sucesión a_n de la siguiente manera:

$$a_1 = x, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es impar} \\ a_n/2 & \text{si } a_n \text{ es par} \end{cases}$$

Escribir un programa que compute la función $f(n)$ que calcula el primer valor de n en el que $a_n = 1$. ¿Es verdad que $f(n) \leq n$?

12. Repetir el ejercicio definiendo

$$a_1 = x, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es impar} \\ a_n/2 & \text{si } a_n \text{ es par} \end{cases}$$

¿Es verdad que $f(n) \leq n$?

13. Escribir un programa que compute la función que al par de números x, y le asigna el menor valor de n tal que las últimas tres cifras de x^n son y, si y tiene hasta tres cifras. Si y tiene más de tres cifras o no hay ninguna potencia como la pedida, entonces el programa no termina. ¿Es posible analizar cuáles son los valores de x, y que hacen que el programa no termine?