

Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2014

Práctica 3: Consecuencia Lógica

Notación Si Γ es un conjunto de fórmulas, denotaremos por $Con(\Gamma)$ al conjunto de fórmulas que son consecuencia lógica de Γ .

1. Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfactibles, y en tal caso encontrar todas las valuaciones que satisfacen a dichos conjuntos.

a) $\Gamma = \{((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$.

b) $\Gamma = \{((p_2 \rightarrow p_1) \rightarrow p_1), \neg p_1, (p_1 \wedge p_3), (p_3 \rightarrow p_1)\}$.

2. Sea $\Gamma \subseteq Form$.

a) Probar que si Γ es satisfactible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfactible.

b) Mostrar (con un ejemplo) que la recíproca no es cierta.

c) Probar que Γ es satisfactible si y sólo si $Con(\Gamma)$ es satisfactible.

3. (*)

a) Sea Γ un conjunto satisfactible de fórmulas. Probar que si el conjunto de valuaciones que satisface a Γ es finito entonces Γ es infinito.

b) Probar que si k es un número natural, entonces existe un conjunto satisfactible Γ de fórmulas del cálculo proposicional tal que existen exactamente k valuaciones que satisfacen a Γ .

4. Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional tal que $\Gamma = \text{Con}(\Gamma)$. Probar que Γ es infinito.
5. Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ conjuntos de fórmulas.
 - a) Probar que $\text{Con}(\emptyset) = \{\alpha \in \text{Form} / \alpha \text{ es una tautología}\}$.
 - b) Probar que $\Gamma \subseteq \text{Con}(\Gamma)$.
 - c) Probar que $\text{Con}(\text{Con}(\Gamma)) = \text{Con}(\Gamma)$.
 - d) Probar que $\text{Con}(\Gamma_1) \cup \text{Con}(\Gamma_2) \subseteq \text{Con}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

Sin embargo ...

- e) Probar que no vale para todo Γ_1, Γ_2 la propiedad $\text{Con}(\Gamma_1) \cup \text{Con}(\Gamma_2) \supseteq \text{Con}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

Ver que de las propiedades anteriores se deduce:

- f) Probar que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $\text{Con}(\Gamma_1) \subseteq \text{Con}(\Gamma_2)$.
- g) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \text{Con}(\Gamma_2)$ entonces $\text{Con}(\Gamma_1) \subseteq \text{Con}(\Gamma_2)$.

6. Sean $\alpha, \beta \in \text{Form}$. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
 - a) $\text{Con}(\{\beta\}) \subseteq \text{Con}(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología.
 - b) $\text{Con}(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = \text{Con}(\{\alpha\}) \cap \text{Con}(\{\beta\})$.
 - c) $\text{Con}(\{(\alpha \vee \beta)\}) = \text{Con}(\{\alpha\}) \cup \text{Con}(\{\beta\})$.
 - d) $\text{Con}(\{(\alpha \rightarrow \beta)\}) \subseteq \text{Con}(\{\beta\})$.

7. Demostrar que son equivalentes:

- a) $\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \in \text{Con}(\emptyset)$.
- b) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.
- c) Existe una fórmula β tal que $\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$.
- d) $\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β .

8. Sea Γ un conjunto satisfactible de fórmulas. Decimos que Γ es *maximalmente satisfactible* si para toda fórmula $\alpha \notin \Gamma$ se tiene que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es insatisfactible.

Mostrar un ejemplo de conjunto maximalmente satisfactible (Pista: se puede construir por comprensión).

9. Dado un conjunto satisfactible de fórmulas Γ :

- a) Probar que Γ es maximalmente satisfactible si y sólo si existe una valuación $v \in Val$ tal que $\Gamma = \{\alpha \in Form/v(\alpha) = 1\}$.
- b) Probar que Γ es maximalmente satisfactible si y sólo si para toda fórmula α se tiene que $\alpha \in \Gamma$ o $\neg\alpha \in \Gamma$.
- c) Probar que existe $\Gamma' \subseteq Form$ maximalmente satisfactible tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$.
- d) Si Γ maximalmente satisfactible, probar que si $(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$, entonces $\alpha \in \Gamma$ o $\beta \in \Gamma$.
- e) Si Γ es maximalmente satisfactible, probar que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\alpha \in \Gamma$.

10. Dado un conjunto satisfactible de fórmulas Γ :

- a) Si Γ es un conjunto maximalmente satisfactible, ¿es necesariamente $\Gamma = Con(\Gamma)$?
- b) Si $\Gamma = Con(\Gamma)$, ¿es necesariamente Γ un conjunto maximalmente satisfactible?

11. Decimos que dos conjuntos $\Gamma, \Gamma' \subset Form$ son *equivalentes* si para toda fórmula α se tiene que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma' \models \alpha$.

Decimos que un conjunto Γ es *independiente* si ninguna fórmula de Γ está tautológicamente implicado por las restantes fórmulas de Γ .

- a) Probar que todo conjunto finito de fórmulas tiene un subconjunto independiente equivalente.
- b) Probar que un conjunto infinito de fórmulas no siempre tiene un subconjunto independiente equivalente.