

Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2014

Práctica 2: Semántica del Cálculo Proposicional

Notación Notaremos con Val al conjunto de las valuaciones.

Si p_0, p_1, \dots, p_n son las primeras $n + 1$ variables proposicionales, notaremos con $Form_n$ al subconjunto de $Form$ formado por las fórmulas α tales que $Var(\alpha) \subseteq \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$.

Dos fórmulas α y β son equivalentes, y se nota $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$ para toda valuación v .

1. Sea $v : Form \rightarrow \{0, 1\}$ una valuación. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, decidir si es posible calcular $v(\alpha)$ en los siguientes casos:
 - a) $\alpha = (\neg p_1)$.
 - b) $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \rightarrow p_1)$.
 - c) $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)$.
 - d) $\alpha = (\neg p_4)$.
 - e) $\alpha = ((p_8 \rightarrow p_5) \rightarrow (p_8 \wedge p_0))$.
 - f) $\alpha = (p_1 \rightarrow p_1)$.
2.
 - a) En los siguientes casos hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$ y $v(p_i) = 0$ si $p_i \notin Var(\alpha)$. ¿Cuántas valuaciones hay en cada caso?
 - 1) $\alpha = ((\neg p_1) \rightarrow (p_3 \vee p_4))$.
 - 2) $\alpha = (\neg(p_2 \rightarrow (p_3 \wedge p_1)))$.
 - 3) $\alpha = (((\neg p_2) \rightarrow p_3) \rightarrow (p_2 \vee (p_5 \rightarrow p_3)))$.
 - b) Para estas mismas fórmulas, hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$. ¿Cuántas valuaciones hay en cada caso?
3. Construir las tablas de verdad correspondientes a las fórmulas:
 - a) El o exclusivo (XOR).
 - b) $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$.
 - c) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1)))$.

4. Decidir si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

- a) $(\neg(p_1 \vee p_2) \rightarrow ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \rightarrow p_3)))$.
- b) $\neg((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)))$.
- c) $((p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_3 \rightarrow ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3))))$.
- d) $((\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \rightarrow p_4)$.
- e) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1) \rightarrow p_1$.

5. Demostrar que las siguientes pares de fórmulas son equivalentes:

- a) $(p_1 \wedge p_2); (\neg((\neg p_1) \vee (\neg p_2)))$.
- b) $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3)); ((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3))$.
- c) $(p_1 \rightarrow p_2); ((\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1))$.

6. Dadas las siguientes tablas de verdad, construir proposiciones a las que éstas correspondan:

a)	p_1	p_2	p_3	α
	0	0	0	1
	0	0	1	0
	0	1	0	1
	1	0	0	1
	0	1	1	0
	1	0	1	0
	1	1	0	1
	1	1	1	0

b)	p_1	p_2	p_3	α
	0	0	0	1
	0	0	1	0
	0	1	0	1
	1	0	0	0
	0	1	1	0
	1	0	1	1
	1	1	0	1
	1	1	1	0

7. Sean $\alpha, \beta \in Form$. Probar:

- a) $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología si y sólo si α y β son tautologías.
- b) $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción si y sólo si α y β son contradicciones.
- c) $(\alpha \rightarrow \beta)$ es contradicción si y sólo si α es tautología y β es contradicción.
- d) Si $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta)$ es tautología si y sólo si α es contradicción o β es tautología.

8. Sean $\alpha, \beta \in Form$.

- a) Probar que si $(\alpha \wedge \beta)$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.
- b) Probar que si α y β no tienen variables proposicionales en común y α y β son contingencias, entonces $(\alpha \wedge \beta)$ es contingencia.
9. Sea $\alpha \in Form$ tal que $(\alpha \vee p_i)$ es tautología y $(\alpha \wedge p_i)$ es contradicción para toda variable proposicional p_i que figura en α . Probar que α tiene una sola variable proposicional.
10. (*) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in Form$ y sea \sim la relación binaria definida en Val : $v_1 \sim v_2$ si y sólo si $v_1(\alpha_i) = v_2(\alpha_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.
- a) Probar que \sim es una relación de equivalencia.
- b) Probar que el número de elementos del conjunto cociente Val/\sim es menor o igual que 2^k .
11. Sean α y β dos fórmulas sintácticamente equivalentes (ver Práctica 1).
- a) ¿Son necesariamente equivalentes?
- b) ¿Si α es una tautología, β es una tautología?
- c) ¿Si α es una contradicción, β es una contradicción?
- d) ¿Si α es una contingencia, β es una contingencia?
12. Dado un conjunto de conectivos, se dice que es *adecuado* si toda tabla de verdad puede ser representada por una fórmula que está construida sólo con los conectivos de este conjunto.
- a) Probar que son adecuados $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$.
- b) Demostrar que no son adecuados $\{\neg\}$, $\{\vee, \wedge\}$, $\{\vee, \rightarrow\}$.
13. Sea $\alpha \in Form$ tal que \vee es el único conectivo que figura en α . Probar que existe una fórmula γ equivalente a α y tal que \rightarrow sea el único conectivo binario que figure en γ .
14. Si α y β son fórmulas, se define $\alpha|\beta$ como $((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))$, conocida como barra de Sheffer (*NAND*); y se define $\alpha \downarrow \beta$ como $((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))$, barra de Nicod (*NOR*).
- a) Construir las tablas de verdad de $\alpha|\beta$ y $\alpha \downarrow \beta$.
- b) Mostrar que $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.

15. Consideremos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\perp\}$, el lenguaje del cálculo proposicional al que se le agrega un símbolo constante o conector 0-ario \perp , caracterizado por $v(\perp) = 0$ para toda valuación.
- a) Probar que $\{\perp, \rightarrow\}$ es adecuado.
 - b) Si en lugar de agregar \perp , le agregamos a \mathcal{L} un símbolo 0-ario \top , caracterizado por $v(\top) = 1$, para toda valuación v , ¿qué podría decirse de $\{\top, \rightarrow\}$?