

Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2014

Práctica 1: Lenguaje del Cálculo Proposicional

Notación: Si X es un conjunto, $\#X$ denota su cardinal; $Form$ denota el conjunto de todas las fórmulas del cálculo proposicional y Var el conjunto de todas las variables proposicionales. Si $\alpha \in Form$,

- $l(\alpha)$ denota la longitud de α .
- $c(\alpha)$ denota la complejidad de α .
- $cb(\alpha)$ la complejidad binaria de α .
- $Var(\alpha)$ es el subconjunto de Var cuyos elementos son las variables proposicionales que figuran en α .
- $\#VarR(\alpha)$ es el número de variables proposicionales que figuran en α contadas tantas veces como aparecen.
- $s(\alpha)$ es el conjunto de subfórmulas de α .

1. Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$, $S = \{p, q\}$, $\Sigma = A \cup S$. Definimos un lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ por las siguientes reglas:

- Si $\beta \in A$ entonces β es una palabra.
- Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($n \geq 0$) son palabras, la expresión $p\alpha_1 \dots \alpha_n q$ también lo es.
- Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene con estas reglas.

Se define el *peso* de una expresión como el número de p que aparecen en la expresión menos el número de q que aparecen en la expresión.

a) Escribir cinco expresiones de Σ^* que no sean palabras y cinco que si lo sean.

- b) Probar que las palabras de \mathcal{L} son expresiones de peso 0.
- c) ¿Es toda expresión de peso 0 una palabra?
- d) Decidir si hay unicidad de escritura en las palabras.
2. Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$, $S = \{l\}$, $\Sigma = A \cup S$. Definimos un lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ por las siguientes reglas:
- Si $\alpha \in A$, entonces α es una palabra.
 - Si χ_1, \dots, χ_n ($n \geq 0$) son palabras, entonces $l\chi_1 \dots \chi_n l$ es una palabra.
 - Una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene con estas reglas.
- a) Probar que si α es una palabra, entonces el número de l que figuran en α (contados tantas veces como aparecen) es un número par.
- b) ¿Toda expresión con una cantidad par de l es una palabra?
- c) Decidir si hay unicidad de escritura en las palabras.
3. Decidir cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas del cálculo proposicional.
- | | |
|---|---|
| 1) $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$ | 4) $(p_1 \vee (\neg p_2))$ |
| 2) $((p_1 \wedge (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow p_4)$ | 5) $((p_1 \vee (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow (p_5 \rightarrow p_2))$ |
| 3) $((\neg p_1 \rightarrow p_1) \rightarrow p_2)$ | 6) $((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow p_3)$ |
4. Probar que si α es una fórmula del cálculo proposicional, entonces α admite infinitas cadenas de formación.
5. Para cada una de las siguientes fórmulas encontrar todas las cadenas de formación minimales y enumerar su conjunto de subfórmulas.
- a) $((p_1 \vee (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow p_4)$
- b) $((p_1 \vee (p_5 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((\neg p_1) \rightarrow (\neg p_2)))$
- c) $((\neg p_1) \vee p_5) \vee (p_1 \wedge (\neg p_2))$
6. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, mostrar que existe $\alpha \in Form$ tal que $\#s(\alpha) = n$.
7. (*) Sea $\alpha \in Form$. Probar que si β es una subfórmula de α , entonces β aparece en toda cadena de formación de α .
8. Sea $\alpha \in Form$, tal que $c(\alpha) > 0$. Probar que existe una subfórmula de α que tiene grado de complejidad 1.

9. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ tales que $n > 2$ y $1 < k < n$. Si $\alpha \in Form$ tal que $c(\alpha) = n$, ¿existe una subfórmula de α con grado de complejidad k ?
10. Sea $\alpha \in Form$. Probar las siguientes relaciones
- $\#VarR(\alpha) = cb(\alpha) + 1$
 - $\#Var(\alpha) \leq cb(\alpha) + 1$
 - $\#s(\alpha) \leq c(\alpha) + \#Var(\alpha)$
11. Sea $\alpha \in Form$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, \dots, p_n\}$ y sean β_1, \dots, β_n fórmulas arbitrarias. Definir inductivamente la noción de sustituir en las variables proposicionales p_1, \dots, p_n por β_1, \dots, β_n . Llamamos $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)$ a tal sustitución.
12. Sean $\alpha, \gamma \in Form$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, \dots, p_n\}$. Diremos que α y γ son *sintácticamente equivalentes* y lo notaremos $\alpha \sim \gamma$ si existen $q_1, \dots, q_n \in Var$ tales que $q_i \neq q_j$ si $i \neq j$, y $\alpha(q_1, \dots, q_n) = \gamma$.
- Probar que es una relación de equivalencia en $Form$.
 - Probar que si $\alpha \sim \gamma$, entonces α y γ tienen la misma complejidad y la misma complejidad binaria.
13. Sea $\alpha \in Form$. Notaremos con α_{\neg} a la expresión que se obtiene al eliminar todas las apariciones del símbolo \neg en α . (Por ejemplo, si $\alpha = (\neg(p_2 \vee (\neg p_3)))$, entonces $\alpha_{\neg} = (p_2 \vee p_3)$.)
- Definir formalmente α_{\neg} para toda $\alpha \in Form$.
 - Probar que si $\alpha \in Form$, entonces $\alpha_{\neg} \in Form$.
 - Analizar cuáles de las siguientes igualdades se cumplen para toda $\alpha \in Form$:

1) $l(\alpha) = l(\alpha_{\neg})$	4) $\#Var(\alpha) = \#Var(\alpha_{\neg})$
2) $c(\alpha) = c(\alpha_{\neg})$	5) $\#VarR(\alpha) = \#VarR(\alpha_{\neg})$
3) $cb(\alpha) = cb(\alpha_{\neg})$	6) $\#s(\alpha) = \#s(\alpha_{\neg})$