Geometría Diferencial 2014

Recuperatorio Segundo Parcial - 21/7/14

Nombre y Apellido	1	2	3	4	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 5 horas.

1. Pruebe que n funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n : M \to \mathbb{R}$ forman una carta en $p \in M^n$ si y solo si $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n(p) \neq 0$.

2. Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ el mapa antípoda: $f(x) = -x$. Probar que f preserva la orientación de $\mathbb{S}^n$ inducida por un campo exterior si y solo si n es impar.

3. Sean M^n y N^m dos variedades orientadas compactas y sean $\omega \in \Omega^n(M)$ y $\eta \in \Omega^m(N)$ formas. Pruebe que es posible dar una orientación en $M \times N$ de manera tal que se satisfaga que:

$$\int_{M\times N} \pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\eta) = \int_M \omega \cdot \int_N \eta,$$

   donde π_i es la proyección de $M \times N$ en la coordenada $i = 1, 2$.

4. Sea ω una 1-forma nunca-nula en una variedad M. Una función suave y nunca-nula μ definida en un entorno $U \subseteq M$, se dice *factor integrante* para ω, si $\mu\omega$ es exacta en U.

   Pruebe que ω admite un factor integrante en un entorno de cada punto si y solo si $d\omega \wedge \omega = 0$.

   Sugerencia: Pruebe que localmente la distribución definida por ω es la misma que la definida por una forma exacta.