Geometría Diferencial 2014

Recuperatorio Primer Parcial - 10/07/14

Nombre y Apellido	1	2	3	4	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 5 horas.

1. Probar que la aplicación $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$f(x_0 : x_1 : x_2) = \frac{(x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$$
está bien definida y es diferenciable. Encontrar los puntos singulares de f.

2. Sea $\mathbb{T}^n$ el toro n-dimensional, probar que existe un difeomorfismo:
$$\phi : T(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$$
que conmuta con las proyecciones $\pi : T(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{T}^n$ y $\pi_1 : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$

3. Sean (U, f) y (V, g) las cartas dadas por las proyecciones estereográficas en $\mathbb{S}^2$. Se consideran los campos en U y V respectivamente dados por:
   - $X_1 = f_1 \frac{\partial}{\partial f_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial f_2}$
   - $X_2 = -g_1 \frac{\partial}{\partial g_1} - g_2 \frac{\partial}{\partial g_2}$

   Probar coinciden en las intersecciones de los abiertos y juntos definen un campo global en $\mathbb{S}^2$.

4. Sean $M_1, \ldots, M_k$ variedades suaves y sea $\pi_i : M_1 \times \ldots \times M_k \to M_i$ la proyección en la coordenada i.
   (a) Probar que para cualquier elección de puntos $p_i \in M_i$, $i = 1, \ldots, k$ el siguiente morfismo
   $$\alpha : T_{p_1,\ldots,p_k}(M_1 \times \ldots \times M_k) \to T_{p_1}M_1 \oplus \ldots \oplus T_{p_k}M_k,$$
   definido por
   $$\alpha(X) = (d\pi_1(X), \ldots, d\pi_k(X))$$
   es un isomorfismo.
   (b) Suponiendo $k = 2$ y tomando X e Y dos campos suaves en M_1 y M_2 respectivamente, se tienen canónicamente determinados los campos $\tilde{X} = (X, 0)$ e $\tilde{Y} = (0, Y)$ en $M_1 \times M_2$. Pruebe que $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$.