Geometría Diferencial 2014

Segundo Parcial - 3/7/14

Nombre y Apellido	1	2	3	4	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 5 horas.

1. Este ejercicio consiste en la realización de las siguientes cuentas que involucran tensores y formas:
   (a) Consideremos en $\mathbb{R}^2$ los $2-$tensores ω_1 y ω_2 dados por
   $$\omega_1 = dx \otimes dy + dy \otimes dx$$
   $$\omega_2 = sen2\theta dr \otimes dr + rcos2\theta dr \otimes d\theta - rcos2\theta d\theta \otimes dr - r^2 sen2\theta d\theta \otimes d\theta$$
   donde el primero esta dado en la carta usual y el segundo en coordenadas polares. Decidir si $\omega_1 = \omega_2$ y si alguno de ellos representa una 2-forma en $\mathbb{R}^2$. Justifique su respuesta.
   (b) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie que se obtiene como grafico de la funcion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
   $$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$
   Si $i : S \to \mathbb{R}^3$ es la inclusion y $\omega = xdx + ydy + zdz$. Dar una formula para $i^*(\omega)$ en la carta (S, φ) donde $\varphi(x, y, z) = (x, y)$. ¿Es $i^*(\omega)$ cerrada?
2. Sea M una variedad conexa orientada, y sea X un campo completo en M. Probar que si $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ es el grupo uniparamétrico asociado a X, entonces para todo t el difeomorfismo $\phi_t : M \to M$ preserva la orientación.
3. Sea $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, -\pi < z < \pi\}$ con la estructura natural de subvariedad inmersa de $\mathbb{R}^3$. Sea $w = xdy \wedge dz \in \Omega(\mathbb{R}^3)$. Expresar $w|_C$ en una carta para C y calcular
   $$\int_C w|_C,$$
   con la orientación inducida por algún campo de $\mathbb{R}^3$ que sea exterior a C.
4. Sea D una distribución de k-planos en una variedad M, $\dim M = n$. Sean $\omega_1, \ldots, \omega_{n-k}$ 1-formas que definen a D en un abierto $U \subseteq M$. Probar que D es involutivo en U si y solo si la siguiente identidad es válida para $i = 1, \ldots, n-k$:
   $$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{n-k} = 0.$$