Geometría Diferencial 2014

Primer Parcial - 12/05/14

Nombre y Apellido	1	2	3	4	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 5 horas.

1. Probar que $\mathbb{CP}^n$, el espacio proyectivo complejo dado por la relación:

$$z \sim w \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : z = \lambda w$$

tiene una estructura de variedad diferencial C^∞ de dimensión $2n$, y que es localmente difeomorfo a $\mathbb{C}^n$.

2. Sea $f : M \to N$ diferenciable. Sea $\Gamma(f) = \{(x, y) : y = f(x)\} \subset M \times N$ el gráfico de f.

   a) Probar que $\Gamma(f) \subset M \times N$ es una subvariedad embebida, y que $\pi_1|_{\Gamma(f)} : \Gamma(f) \to M$ es un difeomorfismo.

   b) Probar que si $S \subset M \times N$ es una subvariedad embebida tal que $\pi_1|_S : S \to M$ es un difeomorfismo, entonces S es el gráfico de una funcion diferenciable.

3. Consideramos en S^2 las cartas (U, ϕ), (V, ψ), donde:

$$U = \{(x, y, z) : z < 0\}, \quad \phi(x, y, z) = (x, y)$$
$$V = S^2 \setminus \{N\}, \quad \psi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \text{ (proyección estereográfica)}$$

Hallar los puntos p de $U \cap V$ tales que $\{\frac{\partial}{\partial \phi_1}|_p, \frac{\partial}{\partial \psi_1}|_p\}$ es una base de T_pS^2. ¿Para qué p vale $\frac{\partial}{\partial \phi_1}|_p = \frac{\partial}{\partial \psi_1}|_p$?. Representar gráficamente.

4. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave y sea p un punto crítico. Sean X, X', Y, Y' campos tales que

$$X_p = X'_p, \quad Y_p = Y'_p.$$

Pruebe

   a) $[X, Y](f)(p) = 0$.

   b) $XY(f)(p) = X'Y(f)(p)$

   c) $XY(f)(p) = X'Y'(f)(p)$

Luego se tiene bien definido el Hessiano, $H_{f,p} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ como $H_{f,p}(v, w) = XY(f)(p)$ donde X e Y son campos tales que $X_p = v$, $Y_p = w$.