Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2014

Programa

1) Variedades diferenciales.
Cartas y atlas. Definicion de variedad diferencial. Ejemplos basicos. Funciones diferenciables entre variedades, expresion en coordenadas. Anillo de germenes de funciones en un punto. Espacio tangente en un punto. Derivada en un punto de una funcion diferenciable. Puntos y valores regulares de una funcion diferenciable. Submersiones. Subvariedades, inmersiones. Transversalidad. Problema de equivalencia local de funciones. Teorema de la funcion inversa y aplicaciones. Teorema del rango constante, imagen inversa de valor regular. Teorema de Sard. Otros ejemplos: curvas, superficies compactas, espacios proyectivos, Grassmannianas, grupos de Lie clasicos, subvariedades, acciones diferenciables de grupos de Lie, espacios homogeneos, ejemplos de pegado de variedades, cirugia, fibraciones. Variedades con borde. Otras nociones de variedad (C^r, analitica real, holomorfa, algebraica, etc.).

2) Campos de vectores.
Definicion, ejemplos, expresion en coordenadas locales. Fibrado tangente, secciones. Derivada, regla de la cadena. Variedades paralelizables. Campo de vectores a lo largo de una subvariedad. Campos f-relacionados. Curvas integrales. Aplicaciones del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias. Flujo, grupo uniparametrico. Indice en un punto singular. Forma normal local de un campo de vectores en un punto no-singular (Teorema de rectificacion). Ejemplo: campo de vectores invariante en un grupo de Lie.

3) Calculo diferencial en variedades. Campos de tensores, formas diferenciales exteriores.
a) Campos de covectores (1-formas diferenciales): definicion, ejemplos, expresion en coordenadas locales.
b) Repaso de algebra multilineal sobre un anillo conmutativo: producto tensorial de modulos, definicion y propiedades basicas. Caso de modulos libres, expresiones en coordenadas. Algebra tensorial. Algebras graduadas. Aplicaciones multilineales simetricas y anti-simetricas. Algebra simetrica. Algebra exterior. Casos de modulos libres, expresiones en coordenadas. Tensores mixtos. Tensores covariantes y contravariantes. Operaciones tensoriales, compatibilidades varias.
c) Campos de tensores: definicion, ejemplos, expresiones en coordenadas locales. Fibrados, secciones. Operaciones tensoriales punto a punto. Formas simetricas de grado dos, metricas de Riemann, ejemplos. Formas diferenciales exteriores. Derivada exterior: definicion, caracterizacion, metodos de calculo. Ejemplo:

gradiente, divergencia y rotor. Formas invariantes en un grupo de Lie. Corchete de campos de vectores. Derivada de Lie de campos de tensores, calculo y propiedades. Introduccion a los pre-haces. Operadores diferenciales, definicion y ejemplos. Jets.

4) Calculo integral en variedades. Teorema de Stokes.
Orientacion. Particiones de la unidad. Formula de cambio de variables, integracion de n-formas en una variedad de dimension n. Simplices y cadenas singulares diferenciables. Integracion de una p-forma a lo largo de una p-cadena. Caras de simplices, bordes de cadenas. Enunciado y demostracion del Teorema de Stokes para cadenas. Otras versiones de Stokes: para dominios regulares con borde, para variedades de Riemann. Complejo singular diferenciable, homologia singular. Complejo de De Rham, formas cerradas y formas exactas, ejemplos, homologia de De Rham. Relacion entre los dos complejos via Stokes. Enunciado del Teorema de De Rham.

5) Distribuciones, Teorema de Frobenius.
Distribuciones. Presentacion por campos de vectores o por formas diferenciales. Variedades integrales. Distribuciones completamente integrables, distribuciones involutivas, teorema de Frobenius. Formulacion via ideales de formas diferenciales. Aplicaciones: correspondencia de Lie, construccion de funciones diferenciables.

6) Conexiones. Geometria Riemanniana.
Conexiones, derivada covariante, curvatura. Transporte paralelo. Geodesicas. Conexion de Levi-Civita en una variedad Riemanniana.

Bibliografia

Alekseevskij, D. V. - Vinogradov, A. M. - Lychagin, V. V. Geometry I: Basic ideas and concepts of differential geometry. Encyclopedia of mathematical sciences, vol. 28. Springer.

Arnold, Vladimir. Mathematical methods of classical mechanics. Springer.

Bourbaki, Nicolas. Elements de Mathematique. Varietes differentielles et analytiques. Fascicule de resultats, paragraphes 1-15. Masson Editeur.

Cartan, Henri. Formes differentielles. Hermann.

Demazure, Michel. Bifurcations and catastrophes. Springer.

De Rham, Georges. Differentiable manifolds. Springer.

Dieudonne, Jean. Elements d'analyse, vols. 3 y 4. Gauthier-Villars. Editions Jacques Gabay. Version en inglés: Treatise on Analysis. Academic Press.

Dubrovin, B. A. - Fomenko, A. T. - Novikov, S. P. Modern geometry, vols. 1-3. Springer.

Guillemin, Victor - Pollack, Alan. Differential topology. Prentice-Hall.

Hermann, Robert. Differential geometry and calculus of variations. Academic Press.

Kobayashi, Shoshichi - Nomizu, Kastumi. Foundations of differential geometry. Vols, I, II. Interscience publishers.

Lang, Serge. Differential and Riemannian manifolds. Springer.

Malliavin, Paul. Geometrie differentielle intrinseque. Hermann.

Postnikov, M. Geometry vol. 6, Riemannian Geometry, Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer.

Spivak, Michael. A Comprehensive Introduction to differential geometry. 5 vols. Ed. Publish or Perish.

Sternberg, Shlomo. Differential geometry, AMS-Chelsea.

Warner, Frank. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Springer. ***(texto basico del curso)***
