Geometría Diferencial 2014

Práctica optativa - Álgebra Multilineal

En esta práctica, V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.

1. Sea $\mathbb{S}_n = \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : \sigma \text{ es biyectiva}\}$ el grupo simétrico en n elementos. Sea
$$\mathbb{R}[\mathbb{S}_n] = \{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} a_\sigma \sigma : a_\sigma \in \mathbb{R}\}$$
el álgebra de grupo. Definimos en $\mathbb{R}[\mathbb{S}_n]$ los elementos $\mathcal{S} = \frac{1}{n!}\sum_\sigma \sigma$ y $\mathcal{A} = \frac{1}{n!}\sum_\sigma (\text{sgn}\sigma)\sigma$. Probar que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ y $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$.

2. Probar que $\mathbb{S}_n$ actúa en $V^{\otimes n}$ por $\sigma \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$. En particular, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ definen morfismos $V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$.

3. Definimos el álgebra tensorial $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ (donde $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$). Definimos el álgebra simétrica $S(V)$ de V por $SV := TV/I$ donde I es el ideal bilátero generado por los elementos de la forma $v \otimes w - w \otimes v$. Observar que $I = \bigoplus_n I_n$, donde $I_n = I \cap V^{\otimes n}$. Probar que $I_n \subseteq \ker(\mathcal{S})$ (la igualdad la probaremos en próximos ejercicios).

4. Este ejercicio es análogo al anterior, cambiando álgebra simétrica SV por álgebra exterior $\bigwedge V$, $v \otimes w - w \otimes v$ por $v \otimes w + w \otimes v$ y $\mathcal{S}$ por $\mathcal{A}$.

5. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Probar que las clases $S^d V$ del siguiente conjunto son una base del álgebra simétrica en grado d,
$$\{v_1^{\otimes i_1} \otimes \ldots \otimes v_n^{\otimes i_n} : i_j \geq 0, i_1 + \ldots + i_n = d\}.$$
Probar la igualdad en el ejercicio 3.

   Sugerencia: Probar primero que las clases generan y luego que $\mathcal{S}$ manda el conjunto a un conjunto l.i.

6. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Probar que las clases en $\bigwedge^d V$ del siguiente conjunto son una base del álgebra exterior en grado d,
$$\{v_1^{\otimes i_1} \otimes \ldots \otimes v_n^{\otimes i_n} : i_j \in \{0, 1\}, i_1 + \ldots + i_n = d\}.$$
Probar la igualdad en el ejercicio 4.

7. Deducir de los ejercicios anteriores que SV y $\bigwedge V$ se pueden mirar como subespacios de TV vía $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ respectivamente. Estos subespacios, ¿son subálgebras?.

8. Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ dos bases de V. Probar que si $w_i = \sum c_{ij} v_j$ entonces $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = \det(c_{ij}) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$.

9. Sea V^* el dual de V, $f_1, \ldots, f_d \in V^*$ y $v_1, \ldots, v_d \in V$. Calcular $\mathcal{A}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_d)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_d)$ en función de los coeficientes $f_i(v_j)$ (aquí estamos usando la identificación $(V^*)^{\otimes d}$ con $(V^{\otimes d})^*$.

10. Probar que las álgebras tensorial, simétrica y exterior son funtoriales,

    a) Si $f : V \to W$ es lineal, f induce morfismos de álgebras $Tf : TV \to TW$, $Sf : SV \to SW$ y $\bigwedge f : \bigwedge V \to \bigwedge W$.

    b) Estos morfismos respetan la composición, si $g : W \to Z$, entonces $T(gf) = TgTf$, $S(gf) = SgSf$ y $\bigwedge(gf) = \bigwedge g \bigwedge f$.

    c) $T(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, $S(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ y $\bigwedge(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$.

11. Sean V y W dos espacios vectoriales con bases $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1 \ldots, w_m\}$ respectivamente. Sea $f : V \to W$ lineal. Se denotan $f^{i_1 \ldots i_d}_{j_1 \ldots j_d}$ los coeficientes matriciales de $f^{\otimes d} : V^{\otimes d} \to W^{\otimes d}$, es decir,

    $$f^{\otimes d}(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_d}) = \sum_{j_1, \ldots, j_d = 1}^{m} f^{i_1 \ldots i_d}_{j_1 \ldots j_d} w_{j_1} \otimes \ldots \otimes w_{j_d}.$$

    Calcular $f^{i_1 \ldots i_d}_{j_1 \ldots j_d}$. ¿Cómo son los coeficientes matriciales para $S^d f$ y para $\wedge^d f$?

12. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Definir $\det(f)$ sin apelar a ninguna base de V. Probar que si g es otro endomorfismo, entonces $\det(fg) = \det(f)\det(g)$.

    Sugerencia: Considerar $\bigwedge^n V$.

13. **Operadores de contracción.**

    a) Probar que para cada par de valores i, j, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ existe una aplicación

    $$c^i_j : T^{p,q}(V) \to T^{p-1,q-1}(V)$$

    que en los tensores elementales vale

    $$c^i_j(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_q) = \varphi_j(v_i) v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_i \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\varphi}_j \otimes \cdots \otimes \varphi_q.$$

    b) Mas generalmente si $I = (i_1, \ldots, i_n)$ y $J = (j_1, \ldots, j_n)$ son dos sucesiones de n índices distintos de $\{1, \ldots, p\}$ y $\{1, \ldots, q\}$ respectivamente, existe una contracción

    $$c^I_J : T^{p,q}(V) \to T^{p-n,q-n}(V)$$

    que en un tensor elemental $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_q$ vale

    $$\prod_{\alpha=1}^{n} \varphi_{j_\alpha}(v_{i_\alpha}) v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \hat{v_{i_2}} \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\varphi_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \varphi_q.$$

    c) Si $p = q = n$ y $I = J = (1, \ldots, n)$, la contracción de (b) permite identificar $(V^*)^{\otimes n}$ con $(V^{\otimes n})^*$.

d) Sea $\alpha : V \otimes V^* \to \hom_K(V,V)$ definida en tensores elementales por $\alpha(v \otimes \varphi)(u) = \varphi(u)v$. Sea $c_1^1 : V \otimes V^* \to K$ el operador de contracción, y sea $\operatorname{tr} : \operatorname{Hom}_K(V,V) \to K$ el operador traza. Probar que $\operatorname{tr} \circ \alpha = c_1^1$.

14. **El dual de $\wedge^n V$.** Probar que la aplicación bilineal simétrica

$$\wedge^n(V^*) \times \wedge^n V \to K$$

definida por

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}y_n} sg(\sigma)\varphi_{\sigma(1)}(v_1)\ldots\varphi_{\sigma(n)}(v_n) = \det(\varphi_j(v_i))$$

induce un isomorfismo entre $\wedge^n(V^*)$ y $(\wedge^n V)^*$.

15. Sean V y W dos espacios vectoriales. Exhibir isomorfismos

$$S^d(V \oplus W) \cong \bigoplus_{i=0}^{d} S^i(V) \otimes S^{d-i}(W) \qquad \text{y} \qquad \wedge^d(V \oplus W) \cong \bigoplus_{i=0}^{d} \wedge^i(V) \otimes \wedge^{d-i}(W)$$