Geometría Diferencial 2014

Práctica 6 - Integración

1. **Orientación en $\mathbb{P}^n$.** Sean $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proyección canónica,

$$E(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

el campo radial (también llamado campo de Euler) y para cada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ la aplicación de multiplicación por λ. Sea $\omega \in \Omega^p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ una p-forma en el espacio proyectivo, y sea $\eta = \pi^*(\omega)$.

   a) Probar que la contracción de η con el campo de Euler es la forma nula, esto es, $i_E(\eta) = 0$.

   b) Probar que $L_\lambda^*(\eta) = \eta$.

Consideremos ahora una p-forma $\eta \in \Omega^p(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ que verifica (a) y (b). Probar que η induce una p-forma $\omega \in \Omega^p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ tal que $\pi^*\omega = \eta$. En tal caso decimos que la p-forma η desciende a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Sugerencia: definir $\omega(\pi(x))(v_1+x\mathbb{R}, \ldots, v_p+x\mathbb{R}) = \|x\|^p \eta(x)(v_1, \ldots, v_p)$, identificando $T\mathbb{P}^n(\mathbb{R})(\pi(x)) = \mathbb{R}^{n+1}/x\mathbb{R}$.

2. Usar el ejercicio anterior para probar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es orientable si n es impar, probando que la n-forma $\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ definida por

$$\eta(x_0, \ldots, x_n) = \frac{1}{||x||^{n+1}} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i dx_0 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

desciende a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y es nunca nula.

Observación: la n-forma η se identifica con el campo de covectores multilineales alternados definido por

$$\eta(x_0, \ldots, x_n)(v_1, \ldots, v_n) = \frac{1}{||x||^{n+1}} \det \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_n \\ - & v_1 & - \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ - & v_n & - \end{pmatrix}$$

3. Sea $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ la inclusión. Probar que $i^*(\eta)$ define una n-forma en S^n nunca nula (η la n-forma del ejercicio anterior), o sea, es una forma de volúmen de S^n.

4. Demostrar de la siguiente manera que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ no es orientable si n es par.

a) Si $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es orientable, y $\omega \in \Omega^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ es la n-forma que define la orientación, entonces $\pi^*(\omega)$ es una n-forma en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ nunca nula.

b) Por el ejercicio anterior, $\theta = i^*(\pi^*(\omega))$ es una n-forma en S^n nunca nula, por lo que $\theta(x) = f(x)V(x)$, donde V es la n-forma que define la orientación en S^n y $f \in C^\infty(S^n)$ (por ejemplo, V puede ser $i^*(\eta)$, con η la n-forma del ejercicio 2).

c) Como $L_\lambda^*(\pi^*(\omega)) = \pi^*(\omega)$, deducir que $(L_{-1})^*(\theta) = \theta$, y por lo tanto $f(x) = (-1)^{n+1}f(-x)$ para todo $x \in S^n$.

d) Deducir entonces que, si n es par, θ es nula en algún punto, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ no es orientable si n es par.

5. Un fibrado vectorial $E \to M$ de fibra $\mathbb{R}^s$ se dice *fibrado orientable* si en cada abierto trivializante U, existen s secciones $e_1, \ldots, e_s : U \to E|_U \cong U \times \mathbb{R}^s$ tales que la matriz de cambio de base en $U \cap U'$ tenga determinante positivo.

   Probar que una variedad es orientable si y sólo si su fibrado cotangente es un fibrado orientable. Mostrar que, en cambio, dicho fibrado siempre es orientable como variedad.

6. Probar que si M tiene un atlas de la forma $\mathcal{A} = \{(U, x); (V, y)\}$ donde $U \cap V$ es conexo, entonces M es orientable.

7. Ver que si M es paralelizable, entonces es orientable.

8. Sean M y N variedades diferenciales. Probar que son equivalentes:

   a) M y N son orientables

   b) $M \times N$ es orientable

9. Probar que la esfera S^n y $\mathbb{R}^n$ son orientables. Probar que el n-toro T^n y el cilindro son orientables.

10. Sea M una variedad (conexa) orientada, $\mathcal{A}$ un atlas orientado y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Probar que si $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ entonces el signo de $J(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ es constante (donde está definida la composición) y no depende de las cartas. *Se dice que f preserva la orientación si $J(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ es positivo. En caso contrario, se dice que f invierte la orientación.*

11. Probar que la integración de formas en una variedad diferencial orientada M cumple las siguientes propiedades:

    a) Si $-M$ denota la variedad on la orientación opuesta, entonces $\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$.

    b) $\int_M a\omega_1 + b\omega_2 = a\int_M \omega_1 + b\int_M \omega_2$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

    c) Si ω es una n-forma continua y positiva entonces $\int_M \omega \geq 0$ y la igualdad se da sólo si $\omega = 0$.

d) Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo y ω es una forma integrable en N, entonces $\int_M f^*\omega = \pm \int_N \omega$, donde el signo depende de si f preserva o invierte la orientación.

12. Sea $\alpha = \frac{1}{2\pi}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. Probar que α es una 1-forma cerrada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calcular la integral de α sobre S^1. Concluir que α y $i^*\alpha$ no son exactas, donde $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ es el embedding canónico.

13. Sea $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\omega(x) = \sum_i \frac{(-1)^i x_i}{|x|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$.

    a) Probar que ω es cerrada pero no exacta.

    b) Calcular $\int_{S^{n-1}} \omega$.

    c) Calcular la integral de ω sobre el elipsoide $\{\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$.

14. Sea M una variedad diferencial y sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Probar que

    a) Si $S \subseteq M$ es subvariedad compacta y orientada de dimensión k tal que $S = \partial W$ para alguna subvariedad $W \subseteq M$, entonces $\int_S \omega = 0$.

    b) Si W es subvariedad de dimensión $k+1$ con borde $\partial W = S \sqcup T$ donde S y T son subvariedades de dimensión k orientadas, entonces $\int_S \omega = -\int_T \omega$

15. Probar que si M es compacta y orientable de dimensión n, entonces una n-forma nunca nula no es exacta.

16. Sea C una curva $\mathcal{C}^1$ en una variedad M, parametrizada por $\Gamma : [a,b] \to M$. Si ω es una 1-forma en M, definimos la integral de línea de ω a lo largo de C por $\int_C \omega := \int_{[a,b]} \Gamma^*\omega$.

    a) Probar que la definición no depende de la parametrización elegida.

    b) Si $\omega = df$ con $f \in \Omega^0(M)$ y la curva C recorre del punto p al punto q, entonces $\int_C \omega = f(q) - f(p)$. En particular, la integral es independiente de la curva elegida entre p y q.

17. Probar que el toro T no es difeomorfo a la esfera S^2.
    Sugerencia: hallar una 1-forma en T cerrada que no sea exacta; ver que toda 1-forma en S^2 cerrada es exacta.