Geometría Diferencial 2014

Práctica 4 - Campos de vectores

1. Sea M una variedad, $p \in M$ y $v \in T_pM$ un vector tangente. Probar que existe un campo $X \in \Gamma(TM)$ tal que $X(p) = v$.

2. Sea $p \in M$ y X un campo definido en un entorno de p tal que $X(p) \neq 0$. Probar que existe una carta (U, ϕ) tal que $X|_U = \frac{\partial}{\partial \phi_1}$.

3. Sea $p \in M$ y $X_1, \ldots, X_k$ campos definidos en un entorno de p tales que los vectores $X_1(p), \ldots, X_k(p)$ son l.i. en T_pM. Probar que existe un entorno U de p tal que $\{X_1(q), \ldots, X_k(q)\}$ es un conjunto l.i. para todo $q \in U$.

4. Sea $M = \mathbb{R}^2$. Identificando T_pM con M de la manera natural, probar que no existe una carta (U, ϕ) tal que los campos $\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \frac{\partial}{\partial \phi_2}$ coincidan respectivamente con los campos $(x, y) \mapsto (1, 0)$, $(x, y) \mapsto (0, y(x^2 + 1))$.

5. Una variedad M es *paralelizable* si existen campos $X_1, \cdots, X_m$ tales que para todo $p \in M$ el conjunto $\{X_1(p), \cdots, X_m(p)\}$ es una base de T_pM.

   a) Probar que S^1 y S^3 son paralelizables;

   b) Probar que el toro T^n es paralelizable;

   c) Probar que si M es paralelizable entonces TM es difeomorfa a $M \times \mathbb{R}^d$;

   d) Hallar un ejemplo de variedad M que no sea paralelizable.

6. Probar que un campo X en M define una derivación en $\mathcal{D}(M)$ via $f \mapsto X(f)$, donde $(X(f))(p) := X(p)(f_p)$ con f_p el germen de f en p. Probar que de este modo se tiene una biyección entre $\Gamma(TM)$ y las derivaciones de $\mathcal{D}(M)$.

7. Sean X, Y campos en M, vistos como derivaciones $X, Y : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$. Mostrar con un ejemplo que $X \circ Y$ no es necesariamente una derivación. Probar que $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ siempre lo es.

8. Sea (U, ϕ) una carta de M. Probar que para todos i y j se tiene $[\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \frac{\partial}{\partial \phi_j}] = 0$.

9. Dados campos X, Y en una variedad M y funciones diferenciables f, g en $\mathcal{D}(M, \mathbb{R})$ probar la formula de Lie-Rinehart:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

10. Si $G = Gl_n(\mathbb{R})$ probar que para todas A, B en $T_eG \cong M_n(\mathbb{R})$ se tiene que

$$[A, B] = AB - BA.$$

Nota: El campo asociado a A y a B es el canónico, $X(M) = MA$ e $Y(M) = MB$.

11. Calcular las curvas integrales y el grupo uniparametrico definidos por el campo X en cada uno de los siguientes casos

    a) $M = \mathbb{R}^2$ y $X(a,b) = b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}$;

    b) $M = \mathbb{R}^2$ y $X(a,b) = a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y}$;

    c) $M = Gl_n(\mathbb{R})$ y $X(A) = AB \in T_A Gl_n(\mathbb{R}) \sim M_n(\mathbb{R})$ con B en $M_n(\mathbb{R})$;

    d) $M = \mathbb{T}^2$ y $X(a,b) = 1\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}$ donde $\frac{\partial}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial}{\partial x_1}$ vienen de la estrucutra de producto de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

12. Sea γ una curva integral de un campo X definido sobre M. Probar que si $\dot{\gamma}(t) = 0$ para algún t, entonces γ es constante.

13. Sea M una variedad, $\epsilon > 0$ fijo y $X \in \Gamma(TM)$ un campo tal que para todo $p \in M$ la curva integral de X que pasa por p está definida en $(-\epsilon, \epsilon)$. Probar que X es completo.

14. Probar que si M es compacta y $X \in \Gamma(TM)$, entonces X es completo.

15. Sea G un grupo de Lie y notemos $L_g : G \to G$ el difeomorfismo $L_g(h) = gh$. Decimos que un campo $X \in \Gamma(TG)$ es *invariante a izquierda* si para todos g, h en G se tiene $(dL_g)(X(h)) = X(gh)$. Es decir, si $(dL_g)X = XL_g$.

    a) Probar que si dos campos invariantes a izquierda coinciden en un punto entonces coinciden en todo G.

    b) Probar que si $v \in T_g(G)$, existe un único campo invariante a izquierda X tal que $X(g) = v$.

    c) Deducir que hay un isomorfismo entre $T_e(G)$ y el espacio de campos invariantes a izquierda.

    d) Probar que todo grupo de Lie es paralelizable.

16. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial V junto con una aplicación bilineal $[\,,] : V \times V \to V$ satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

    Antisimetría: $[X,Y] = -[Y,X]\ \forall X, Y \in V$;

    Identidad de Jacobi: $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0\ \forall X, Y, Z \in V$.

    Probar que $\Gamma(TM)$ es un álgebra de Lie.

17. Probar que si G es un grupo de Lie y X, Y son campos invariantes a izquierda entonces $[X,Y]$ es invariante a izquierda. Deducir que $\mathcal{G} = T_eG$ hereda una estructura de algebra de Lie.

18. Sea G un grupo de Lie y tomemos $v \in T_eG$, sea X_v el unico campo invariante a izquierda con $X_v(e) = v$ y denotemos por ϕ_v^t el grupo uniparametrico definido por X_v. Sea $\exp : T_eG \to G$ dada por $\exp(v) = \phi_v^1(e)$.

Probar que si $\varphi : G \to H$ es un morfismo de grupos de Lie entonces

$$\varphi \circ \exp = \exp \circ \, d_e\varphi.$$

19. Sea $f : M \to N$ diferenciable. Un par de campos $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(TN)$ se dicen *f-relacionados* si $Y(f(p)) = (df)(X(p))$ para todo $p \in M$, es decir, si $Yf = (df)X$. Notamos $X \sim_f Y$.

    a) Probar que si $X \sim_f Y$ y $Y \sim_g Z$, entonces $X \sim_{gf} Z$.

    b) Probar que si $X_1 \sim_f Y_1$ y $X_2 \sim_f Y_2$ entonces $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.

20. Sea $f : M \to U \subset \mathbb{R}$ diferenciable, propia, sobreyectiva y tal que todo $t \in U$ es valor regular.

    a) Probar que existe $X \in \Gamma(TM)$ tal que $X \sim_f \frac{\partial}{\partial t}$. ¿Es X único?

    b) Sea X como en *a*). Probar que X es completo.

    c) Probar que $f^{-1}(u)$ es difeomorfo a $f^{-1}(u')$ para todo par $u, u' \in U$.

Nota: De la misma forma se puede probar el teorema de Ehresmann que dice que si $f : M \to N$ es una submersion propia y sobreyectiva entonces f es una fibracion localmente trivial.