Geometría Diferencial 2014

Práctica 3 - Subvariedades

1. Una definición alternativa de subvariedad es la siguiente: $N \subset M^{(m)}$ se dice una subvariedad de dimensión n, si para cada $p \in N$ existe una carta local (U, ϕ), con $\phi(U) = V \times W$ donde $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ y $0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ son abiertos respectivos y satisfacen:
$$\phi(U \cap N) = V \times 0$$
Observar que N con la topología inducida hereda una estructura de variedad diferencial a partir de la estructura de M, que hace que $i : N \to M$ sea un embedding.
Probar que si $f : N \to M$ es un embedding, entonces $f(N) \subset M$ es una subvariedad con la definición anterior, y es difeomorfa a N.

2. (*) Sean M y N dos variedades C^∞, y sean TM y TN sus variedades tangentes asociadas. Probar que si $f : M \to N$ es un embedding entonces $df : TM \to TN$ es un embedding. ¿Vale la recíproca?

3. Sea $i : S \to M$ regular, inyectiva y *propia*, es decir, la preimagen de compactos es compacto. Probar que i es un embedding, es decir que S es una subvariedad embebida.

4. Sea M una variedad compacta de dimensión m. Probar que no hay una inyección regular $M \to \mathbb{R}^m$.

5. Sean M y N variedades de dimensión d y sea $f : M \to N$ regular. Probar que f es un difeomorfismo local.

6. *a*) Sea $f : M \to N$ diferenciable, sea $q \in N$ y sea $X = f^{-1}(q)$. Probar que si $f|_X$ es una submersión entonces X es una subvariedad diferencial de M y $d_p i(T_p X) = \ker(d_p f)$, donde $i : X \to M$ es la inclusión.

   b) Consideremos la inclusión $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$. Expresar en la base canónica $\{e_{ij}\}$ la imagen de $T_I(\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})) \hookrightarrow T_I(\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}))$. Repetir lo mismo para $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$.

7. Sean M y N variedades de dimensión d, con M compacta, y sea $f : M \to N$ diferenciable.

   a) Probar que si $p \in N$ es valor regular, entonces $f^{-1}(p)$ es un conjunto finito.

   b) Probar que la asignación $p \mapsto \# f^{-1}(p)$ es localmente constante (donde p recorre valores regulares de f).

8. Sea $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ y $N = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Hallar un embedding $f : M \to N$. Probar que no existe $g : N \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que tenga al 0 como valor regular y tal que $f(M) = g^{-1}(0)$.

9. *a*) Sea (U, ϕ_N) la carta de S^2 dada por la proyección estereográfica. Probar que un polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ define una función diferenciable $f_P : S^2 \to S^2$ cuya expresión local $\phi_N \circ f_P \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se identifica con P.

   b) Probar el teorema fundamental del álgebra.
   Sugerencia: Utilizar que el ejercicio 7.

10. Sea M una variedad de dimensión d, $p \in U \subset M$, U abierto, y $\phi_1, \ldots, \phi_d : U \to \mathbb{R}$ diferenciables tales que $d_p\phi_1, \ldots, d_p\phi_d$ son linealmente independientes. Probar que las funciones $\{\phi_i\}$ determinan una carta de M en un entorno de p.

11. *a*) Sea $f : M \to N$ diferenciable, $\dim M \leq \dim N$. Sea $p \in M$ punto regular, y sea (U, ϕ) carta de N con $f(p) \in U$. Probar que un subconjunto de las funciones $\{\phi_i \circ f\}$ determina una carta de M en un entorno de p.

    b) Sea $S \subset N$ una *subvariedad embebida* (la inclusión es un embedding) y sea $f : M \to N$ diferenciable satisfaciendo $f(M) \subset S$. Probar que $f : M \to S$ es diferenciable.

12. Sea $f : M \to N$ suave, y sea X otra variedad suave.

    a) Probar que si f es regular, entonces para toda $g : X \to M$ función continua tal que $f \circ g$ es suave se puede deducir que g es suave.

    b) Probar que si f es un embedding, entonces para toda $g : X \to M$ función tal que $f \circ g$ es suave se puede deducir que g es continua y suave.

    c) Probar que si f es una submersión suryectiva, entonces para toda $g : N \to X$ función tal que $g \circ f$ es suave se puede deducir que g es suave.

    Sugerencia: utilizar las formas canónicas locales de las regulares y submersiones. Además observar que conceptualmente, este ejercicio es una generalización del ejercicio 11.

13. (*) Sea $f : M \to N$ una función diferenciable y sea S una subvariedad embebida de N tales que para todo $p \in f^{-1}(S)$ vale $d_pf(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$. Probar que $f^{-1}(S)$ es una subvariedad embebida de M de dimensión $\dim M - \dim N + \dim S$.

14. (*) Dos subvariedades embebidas S_1, S_2 de M son *transversales*, y lo notamos $S_1 \pitchfork S_2$, si para todo $p \in S_1 \cap S_2$ vale $T_pS_1 \cap T_pS_2 = \{0\}$ ó $T_pS_1 + T_pS_2 = T_pM$. Probar que si $S_1 \pitchfork S_2$, entonces $S_1 \cap S_2$ es una subvariedad embebida de M. Probar además que si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, entonces $\dim S_1 \cap S_2 = \max(\dim S_1 + \dim S_2 - \dim M, 0)$.