

A) Estimadores de Bayes.

1. Consideremos una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  tal que  $X_i | \theta = \theta \sim F_\theta$  y  $\theta$  tiene distribución a priori  $\Lambda$ . Se quiere estimar  $q(\theta)$  con función de pérdida cuadrática. Probar que si  $T(\mathbf{X})$  es un estadístico suficiente para  $\theta$ , entonces el estimador de Bayes de  $q(\theta)$  depende de  $\mathbf{X}$  sólo a través de  $T$ .
2. (a) Sea  $\theta$  con distribución a priori  $\Lambda$  y  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. tal que  $X_i | \theta = \theta \sim F_\theta$ . Se desea estimar  $q(\theta)$  utilizando la función de pérdida cuadrática. Demostrar que si el estimador de Bayes  $\delta_\Lambda(\mathbf{X})$  es un estimador insesgado de  $q(\theta)$ , es decir

$$E(\delta_\Lambda(\mathbf{X}) | \theta = \theta) = q(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta,$$

entonces  $E[(\delta_\Lambda(\mathbf{X}) - q(\theta))^2] = 0$ .

- (b) Mostrar que  $\bar{X}$  no es un estimador de Bayes de  $\theta$  para ninguna distribución a priori  $\Lambda$  cuando  $X | \theta = \theta \sim N(\theta, 1)$
3. Sea  $X$  una v.a. tal que  $X | \theta = \theta \sim \mathcal{U}(0, \theta)$  y  $\theta \sim \Gamma(2, 1)$ .
  - (a) Encontrar el estimador de Bayes cuando  $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$ .
  - (b) Encontrar el estimador de Bayes cuando  $L(\theta, d) = |\theta - d|$ .

4. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a. tal que  $X_i | \theta = \theta \sim Bi(1, \theta)$  y  $\theta \sim \Lambda$  continua. Consideremos la función de pérdida cuadrática.

- (a) Probar que  $\bar{X}$  no es un estimador de Bayes de  $\theta$ .
- (b) Hallar el estimador de Bayes  $\delta_\Lambda$  cuando  $\Lambda = \beta(r, s)$ , con  $r, s > 0$ . Mostrar que  $\delta_\Lambda$  es un promedio pesado entre  $\bar{X}$  y  $\frac{r}{r+s}$ . Interpretar.

*Recordar: que  $\theta \sim \beta(r, s)$  si su función de densidad es  $f(\theta) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \theta^{r-1} (1-\theta)^{s-1} I_{(0,1)}(\theta)$*

5. Consideremos una m.a.  $X_1, \dots, X_n$  tal que  $X_i | \theta = \theta \sim \mathcal{P}(\theta)$  y  $\theta \sim \Gamma(r, \lambda)$ , con  $r, \lambda > 0$ .

- (a) Encontrar el estimador Bayes  $\delta_\Lambda$  y calcular  $r(\delta_\Lambda, \Lambda)$  el riesgo de Bayes.
- (b) Mostrar que  $\delta_\Lambda$  puede escribirse como un promedio pesado entre  $\bar{X}$  y  $\frac{r}{\lambda}$ . Interpretar.
- (c) Encontrar el estimador de Bayes de  $\theta$  para la función de pérdida  $L(\theta, d) = \frac{(\theta - d)^2}{\theta}$  y calcular  $r(\delta_\Lambda, \Lambda)$ .

B) Estimadores minimax y admisibles.

1. Si  $X_1, \dots, X_n$  es una m.a. tal que  $X | \theta = \theta \sim Bi(1, \theta)$ , probar que  $\bar{X}$  es minimax y admisible para la función de pérdida  $L(\theta, d) = (\theta - d)^2 / [\theta(1 - \theta)]$ .

Tener en cuenta que para la función de pérdida mencionada  $\bar{X}$  es el estimador de Bayes de  $\theta$  cuando  $\theta \sim U(0, 1)$

2. Si  $X_1, \dots, X_n$  es una m.a. tal que  $X | \theta = \theta \sim \mathcal{P}(\theta)$ , mostrar que  $\bar{X}$  es el único minimax para la función de pérdida  $L(\theta, d) = (\theta - d)^2 / \theta$ .