

A) Consistencia y distribución asintótica.

1. (a) Sea δ_n un estimador con $V_\theta(\delta_n) < \infty$. Probar que si $\text{ECM}_\theta(\delta_n) \rightarrow 0$, entonces δ_n es débilmente consistente.

(b) Sea X_1, \dots, X_n una m.a. tal que $E_\theta(X) = \theta$ y $V_\theta(X) < \infty$. Consideremos el siguiente estimador aleatorizado de θ :

$$\delta_n = (1 - \varepsilon_n) \bar{X} + \varepsilon_n n$$

donde $\varepsilon_n \sim \text{Bi}(1, 1/n)$ y es independiente de las X_i . Probar que δ_n es débilmente consistente, aunque $\text{ECM}_\theta(\delta_n) \rightarrow \infty$.

2. Sea Θ un espacio paramétrico finito y δ_n el EMV de θ . Probar que δ_n es débilmente consistente si y sólo si $P_\theta(\delta_n = \theta) \rightarrow 1 \forall \theta \in \Theta$.

3. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{E}(\theta)$. Probar que el EMV de θ es fuertemente consistente y asintóticamente eficiente.

4. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Consideremos $\delta_n = \bar{X}$ y

$$\delta_n^* = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

(a) Analizar si estos estimadores de λ son fuertemente consistentes.

(b) Hallar sus distribuciones asintóticas. Decir si alguno de los dos es asintóticamente eficiente. (NOTA: $E(X^4) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$)

5. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $U(0, \theta)$.

(a) Probar que el EMV de θ es débilmente y fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.

(b) Probar que el estimador de momentos para θ es fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.

(c) ¿Cuál de estos dos estimadores preferiría? ¿Por qué?

6. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución exponencial desplazada, cuya densidad es

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta, \infty)}(x).$$

(a) Probar que el EMV de θ es débilmente y fuertemente consistente y hallar su distribución asintótica.

(b) Probar que el estimador de momentos para θ es consistente y hallar su distribución asintótica.

(c) ¿Cuál de estos dos estimadores preferiría? ¿Por qué?

7. Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de una distribución $F_0(x - \theta)$ con F_0 una función de densidad fija y $\theta \in \mathbb{R}$. Sea δ_n un estimador de θ equivariante por traslaciones (i.e.: para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$ se verifica que $\delta_n(x_1 + c, \dots, x_n + c) = \delta_n(x_1, \dots, x_n) + c$). Mostrar que la varianza asintótica de δ_n (si existe) no depende de θ .

8. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución F con densidad $f(x - \mu)$ donde $f(x)$ satisface: i) $f(x) = f(-x)$, ii) $f(x)$ continua en $x = 0$.
- (a) Sea $Z_{a,i} = I\{X_i \leq a\}$. Mostrar que $Z_{a,i}$ tiene distribución $\text{Bi}(1, F(a))$.
 - (b) Sea $Z_a = \sum Z_{a,i}$. Mostrar que Z_a tiene distribución $\text{Bi}(n, F(a))$.
 - (c) Probar que
$$P(Z_a \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \leq P(\text{mediana}(X_1, \dots, X_n) \leq a) \leq P(Z_a \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$$
 - (d) Mostrar que $\text{mediana}(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador débilmente consistente de μ .

B) Ejercicio para hacer en la computadora.

1. Retomemos el ejercicio 1 de la práctica 2 parte D). Para cada uno de los 4 conjuntos de 1000 datos realizar un histograma. Puede decir algo sobre las distribuciones asintóticas de los estimadores?, a que familias pertenecen?, cuáles son sus parámetros?.