Método de Elementos Finitos y Aplicaciones - TP2

Primer Cuatrimestre de 2014

Segundo Trabajo Práctico (2D)

Sea Ω un polígono **convexo** en $\mathbb{R}^2$. Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\triangle u + \alpha(y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial y} & = & f & \text{en} & \Omega \\ \\ u & = & 0 & \text{en} & \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{(PC)}$$

Donde α y β son funciones continuas y acotadas en Ω y $f \in L^2(\Omega)$.

i) Hallar la forma débil en un espacio adecuado V.

ii) Probar que la forma bilineal asociada es continua y coercitiva en V y demostrar que existe una solución única en V de la formulación débil.

iii) Sea T_h una triangulación regular de Ω. Sea $V_h \subset V$ el espacio de funciones continuas en Ω, lineales en cada triángulo de T_h , i.e, $V_h = \{v \in V : v_{|_T} \in \mathcal{P}_1, \forall T \in T_h\}$. Demuestre que el problema discreto tiene solución única.
Asumiendo que la solución del problema está en $H^2(\Omega)$ concluya la convergencia del método de elementos finitos propuesto.

iv) Asumiendo que, para f, α y β en las condiciones dadas, la solución del problema (PC) satisface la estimación apriori : $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$.
Demostrar, usando la técnica de Aubin-Nistche, que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

v) Dados Ω (o una triangulación de Ω), f una función en $L^2(\Omega)$ y α, β constantes.
Hacer un programa de EF que resuelva el problema dado

vi) Para un ejemplo en particular (a su elección), estime numericamente el error cometido en $\|\cdot\|_{H^1}$ y en $\|\cdot\|_{L^2}$ y verifique que se obtiene el orden esperado.