ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Primer cuatrimestre 2014

Práctica 3 - Matrices

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

   (a) $A + 3B - 3C$.
   (b) $A + 3(B - C)$.
   (c) $A - (B - 2C)$.
   (d) $A - B + 2C$.

2. Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5\times 7}$, $C \in \mathbb{R}^{7\times 5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

   (a) $A \cdot B$
   (b) $B \cdot A$
   (c) $B \cdot C$
   (d) $C \cdot B$
   (e) $A \cdot B \cdot C$
   (f) $B \cdot C \cdot A$
   (g) $A \cdot A$
   (h) $B \cdot C \cdot B \cdot C$

3. Cuando sea posible, calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

   (a) A^2.
   (b) B^3.
   (c) $-2A^2 + B^3 A$.

5. Mostrar, dando un contraejemplo, que la propiedad "$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$" no es válida para matrices.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ analizar si son válidas (para matrices) las fórmulas clásicas de factorización:

   (a) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   (b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular:

(a) A^t y B^t.

(b) $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.

8. Dar ejemplos, si existen, de matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A \neq 0$ y $A \neq I$ (distinta de la matriz nula y de la matriz identidad) que cumplan:

   (a) $A^2 = I$.

   (b) $A^2 = 0$.

   (c) $A^2 = A$.

   (d) $A \cdot B = B \cdot A$ para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

9. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz A. ¿Qué cambios producen los productos en la matiz A?

   (a) $A \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot A$.

   (b) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$.

   (c) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

   (d) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

10. Considerar el sistema lineal

$$S: \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}.$$

   a) Reescribir el sistema como producto de matrices (notación matricial). Hacer lo mismo para el sistema homogéneo asociado.

   b) Resolver haciendo uso de la "matriz ampliada" y reescribir, mostrando las ecuaciones, el sistema lineal equivalente resultante.

11. a) Reescribir, mostrando las ecuaciones, el sistema lineal $A \cdot \bar{x} = b$ en cada uno de los siguientes casos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

   b) Resolver cada uno de los sistemas del item a) haciendo uso de la "matriz ampliada".

12. Calcular, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices verificando que la matriz hallada es efectivamente la inversa.

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Resolver los sistemas del ejercicio 11 haciendo uso de la matriz inversa.

14. Verificar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ son inversibles y calcular:

   (a) A^{-1} y B^{-1}.

   (b) $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, verificar que:

   (a) si $ad - bc \neq 0$, entonces A es inversible con inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

   (b) si $ad - bc = 0$, entonces A no es inversible.

16. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ o $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, según corresponda, tales que:

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

17. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que verifican $A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \frac{1}{2}C$ para

   $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

18. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifican $A \cdot X = 2X + B^t$ para

   $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

19. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con A inversible tal que $BA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sea $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $B^tX = 3A^{-1} - A^{-1}X$.

   Probar que X es inversible y calcular su inversa.