

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Primer cuatrimestre 2014

Práctica 4 - Geometría lineal

Operaciones vectoriales (II)

1. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:

- (a) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (-2, 2)$. (c) $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\vec{w} = (1, 0, 1)$.
(b) $\vec{v} = (2, -3)$; $\vec{w} = (0, 0)$. (d) $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\vec{w} = (-2, 1, 1)$.

2. Hallar:

- a) Tres vectores en el plano, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.
b) Todos los vectores de \mathbb{R}^2 que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.
c) Tres vectores de \mathbb{R}^3 , distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.
d) Un vector de \mathbb{R}^3 que sea ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?
e) Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).

3. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

- (a) $\vec{v} = (1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1)$. (c) $\vec{v} = (1, 2)$; $\vec{w} = (-2, 1)$.
(b) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (0, 1)$. (d) $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1, 1)$.

4. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ determinar:

- a) el ángulo entre ambos vectores.
b) el módulo de \vec{u} , \vec{v} y $\vec{u} - \vec{v}$.

5. Sean \vec{u} y \vec{v} en \mathbb{R}^3 dos vectores que verifican $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.

6. Calcular el producto vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ para los siguientes pares de vectores:

- (a) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$. (c) $\vec{u} = (2, 1, -3)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$.
(b) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (2, 1, -3)$. (d) $\vec{u} = (2, 0, 0)$; $\vec{v} = (0, 0, 3)$.

En cada caso, verificar que \vec{w} es ortogonal tanto a \vec{u} como a \vec{v} .

7. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en \mathbb{R}^3 :

- a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a \vec{u} y \vec{v} . ¿Es único?
b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a \vec{w} y \vec{z} .
c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a \vec{w} y \vec{z} . ¿Es único?

Geometría lineal

1. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L :

a) $L : t(-2, 3) + (2, 2)$

$$P_1 = (2, 2), P_2 = (-2, 3), P_3 = (0, 0), P_4 = (12, -13), P_5 = (2, -1).$$

b) $L : t(-1, 1) + (3, -3)$

$$P_1 = (3, -3), P_2 = (0, 0), P_3 = (-1, 1), P_4 = (3, 4), P_5 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

2. Graficar y dar una ecuación vectorial para la recta que:

a) pasa por $P = (-1, 2)$ con vector director $v = (3, 1)$.

b) pasa por $P = (1, -4)$ y $Q = (-1, -3)$.

c) es paralela a la recta $L : t(-2, 3) + (1, -1)$ y pasa por $P = (1, -4)$.

d) es perpendicular a la recta $L : t(2, 3) + (5, 7)$ y pasa por el origen.

3. a) Dar una ecuación vectorial para cada una de las siguientes rectas en \mathbb{R}^2 :

i. $y = -2x + 1$.

iii. $y = -2$.

ii. $2x - 3y = 5$.

iv. $x = 3$.

- b) Dar una ecuación implícita para cada una de las siguientes rectas en \mathbb{R}^2 :

i. $L_1 : t(3, 2) + (1, 1)$.

ii. $L_2 : t(2, 0) + (-1, 3)$.

iii. $L_3 : t(0, -1) + (2, 1)$.

- c) Hallar analítica y gráficamente $L_1 \cap L_2$ y $L_1 \cap L_3$.

4. En cada uno de los siguientes casos, dar una ecuación vectorial para la recta que:

a) está dirigida por $v = (0, 1, 0)$ y pasa por $P = (0, 2, 4)$.

b) pasa por los puntos $P = (-2, 3, 4)$ y $Q = (-1, 3, 1)$.

c) es paralela al eje z y pasa por $P = (1, 2, 3)$.

d) es perpendicular a la recta $L : t(1, -2, 1) + (3, 5, 7)$ y pasa por $P = (1, 9, -3)$. ¿Es única?

5. Dado el plano $\pi : 2x - 5y + 3z = 11$:

a) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2a, a, 7) \in \pi$.

b) Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 3a, 5a) \in \pi$.

6. a) Dar una ecuación implícita para el plano

$$\pi : t(1, 1, 0) + s(0, -1, 2) + (-2, 0, 4).$$

- b) Dar una ecuación vectorial para el plano

$$\pi : -x + 3y + 2z = 1.$$

7. Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por v y w que pasa por el punto P en los siguientes casos:

a) $v = (0, 1, 0)$, $w = (1, 0, 0)$, $P = (0, 0, 1)$.

b) $v = (0, 2, 0)$, $w = (1, 1, 0)$, $P = (-1, 2, 1)$.

Graficar los planos y compararlos.

8. Dar una ecuación paramétrica y una ecuación implícita para el plano que:
- pasa por los puntos $(2, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$ y $(3, 2, 7)$.
 - pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y .
 - es paralelo a la recta $L : t(1, 2, -4) + (1, 2, 1)$ y contiene a los puntos $P = (2, 2, 1)$ y $Q = (1, 2, -3)$.
 - contiene al punto $(-1, 2, 2)$ y es ortogonal a la recta $L : t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$.
9. a) Decidir si los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, 0, 1)$ y $C = (3, 0, 2)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.
- b) Decidir si los puntos $A = (8, 2, 4)$, $B = (4, 2, 8)$, $C = (-2, 0, 1)$ y $D = (1, -1, 3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.
10. Sean $\pi : 2x - y + 3z = 5$, $L : t(1, -1, -1) + (1, 0, -2)$ y $L' : t(3, 5, 1) + (0, 1, 2)$. Calcular $L \cap \pi$ y $L' \cap \pi$.
11. Determinar si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:
- $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$, $L' : t(-1, 1, 2) + (1, 0, -1)$.
 - $L : t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2)$, $L' : t(2, 2, -2) + (1, 0, -1)$.
 - $L : t(1, \frac{1}{2}, -1) + (-1, 1, 2)$, $L' : t(-2, -1, 2) + (3, 3, -2)$.
 - $L : t(1, 2, -1) + (-1, -1, 2)$, $L' : t(-1, 1, 1) + (3, 2, -1)$.

En cada caso determinar si existe un plano que contenga a L y L' . Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

12. Determinar en qué casos los planos π_1 y π_2 se intersecan y hallar la intersección.
- $\pi_1 : 4x + 2y - 3z = 1$; $\pi_2 : 2x + y - \frac{3}{2}z = 1$.
 - $\pi_1 : 3x - 2y - 1 = 0$; π_2 el plano dirigido por $(0, 0, 1)$, $(2, 3, 3)$ que pasa por $(1, 1, 2)$.
 - π_1 el plano que pasa por $(-1, 1, 2)$ con vector normal $(1, 2, -1)$;
 π_2 el plano que pasa por $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 1)$ y $(-1, -2, 2)$.
13. Hallar ecuaciones implícitas para cada una de las rectas siguientes (es decir, describirlas como intersección de dos planos dados por ecuaciones implícitas):
- L que es intersección del plano xy con el plano yz .
 - $L : t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$.
 - L que pasa por los puntos $(-5, 3, 7)$ y $(2, -3, 3)$.
14. En cada uno de los siguientes casos, hallar la intersección de las rectas L y L' :
- $L : t(1, 1, 0) + (0, -1, 2)$, $L' : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$.
 - $L : t(1, 1, 0) + (0, -1, 2)$, $L' : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + 2y + z = 2 \end{cases}$.
15. Sean L_1 y L_2 las rectas de \mathbb{R}^2 , $L_1 : x - y = 1$, y $L_2 : x + y = 3$.
- Calcular el ángulo entre L_1 y L_2 .
 - Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_3) = \angle(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

16. Sean $L_1 : t(1, -2, 1) + (0, 0, -2)$ y L_2 la recta que pasa por $(1, 4, 2)$ y $(0, 2, -1)$.
- Verificar que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.
 - Hallar un plano que contenga a L_1 y L_2 y determinar el ángulo entre L_1 y L_2 .
17. Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1, 2, -1)$ y pasa por $(-1, 3, 1)$, y sea L_2 la recta que pasa por $(-1, 1, 3)$ y por $(1, 2, 7)$.
- Verificar que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.
 - Determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1, 1, 3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2 .
18. Encontrar **todos** los puntos de la recta $L : t(1, -1, 0) + (2, 1, -1)$ que están a distancia 6 del punto $P = (2, 1, -1)$.
19. Calcular la distancia entre:
- la recta $L : t(1, 1) + (3, 0)$ y el punto $P = (-1, 1)$.
 - la recta $L : t(1, 1, 0) + (3, 0, 0)$ y el punto $P = (-1, 1, 0)$.
 - el plano π que pasa por $(1, 2, 1)$ y tiene vector normal $(1, -1, 2)$ y el punto $P = (1, 2, 5)$.
20. Sean $L : t(2, -2, -3) + (0, 2, 2)$ y $P = (0, -2, -1)$.
- Hallar el plano π perpendicular a L que pasa por P y determinar $Q = L \cap \pi$.
 - Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?
21. Se consideran las rectas $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 4x - y - 2z = 9 \end{cases}$ y $L_2 : t(1, 0, 2) + (1, 2, -3)$.
- Probar que L_1 y L_2 son paralelas.
 - Hallar un plano π perpendicular a L_2 que pase por $P = (1, 2, -3)$ y determinar $Q = L_1 \cap \pi$.
 - Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa el número $d(P, Q)$ en este problema?
22. Sean π el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y L la recta $L : t(-1, 0, 1) + (1, 1, 2)$.
- Probar que L es paralela a π .
 - Hallar una recta L' ortogonal a π que pase por $P = (1, 1, 2)$ y determinar $Q = L' \cap \pi$.
 - Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa el número $d(P, Q)$ en este problema?