Elementos de Cálculo Numérico (M) - Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2014

Práctica N°4: Resolución de ecuaciones no-lineales.

Ejercicio 1 Implementar un programa que reciba como input una función f, dos números a, b, y una tolerancia tol y aplique el método de bisección para aproximar una raíz de f en el intervalo $[a, b]$, garantizando que el error cometido sea menor que tol.

Ejercicio 2 Implementar un programa como el del ejercicio anterior para el método de Regula Falsi.

Ejercicio 3 Elegir un intervalo apropiado y utilizar los métodos de bisección y Regula Falsi para hallar una raíz positiva de la ecuación trascendente:

$$2x = \tan(x)$$

¿Cuántos pasos hay que hacer para garantizar que el error sea menor que 10^{-5}?

Ejercicio 4 Implementar un programa que reciba como input una función f, su derivada f' y un punto inicial x_0 y aplique el método de Newton-Raphson para buscar una raíz de f a partir de x_0.

Ejercicio 5 Implementar un programa que reciba como input una función f y dos puntos x_0 y x_1 y aplique el método de la secante para buscar una raíz de f con datos iniciales x_0 y x_1.

Ejercicio 6 Aproximar $\sqrt[3]{2}$ utilizando el método de bisección con intervalo inicial $[1, 2]$, el método N-R, comenzando con $x_0 = 2$ y el método de la secante con $x_0 = 3$, $x_1 = 2$.

Ejercicio 7 Considerar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. Determinar para qué valores de x_0 la iteración N-R es convergente, para cuáles es divergente, y cuándo se obtienen ciclos periódicos.

Ejercicio 8 Demostrar que la ecuación

$$f(x) = e^x + 5\sin x - 2 = 0$$

tiene una única raíz r en el intervalo $(0, \frac{3}{2})$. Encontrar un valor inicial en este intervalo de modo que el método N-R converja a r (para ello, calcular cotas necesarias para $|f'|$ y $|f''|$ en el intervalo). Aplicar el método para hallar una aproximación de r. ¿Cuál es el orden de convergencia?

Ejercicio 9 La ecuación $x^3 + \cos(x) + 7x = 0$ tiene una única raíz real.

a) Demostrar que el método de Newton-Raphson converge para todo valor inicial en $(-1, 0)$.

b) Demostrar que si $x_0 = -0.5$, el error n-ésimo es menor o igual que $\frac{1}{2^{n+1}}$

c) Calcular cuántos pasos del método son necesarios para aproximar la solución con error menor o igual que 10^{-100}.

Ejercicio 10 Sea f una función suave, y a tal que $f(a) = 0$, y $f'(a) \neq 0$. Suponiendo que en $(a, b]$, f, f', f'' son positivas, probar que la iteración de N-R generada a partir de $x_0 \in (a, b)$ converge decrecientemente hacia a.

Ejercicio 11 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)e^x - 4$.

a) Probar que el método de Newton-Raphson es convergente para todo $x_0 > 1$.

b) Analizar la convergencia del método si se toma como valor inicial $x_0 = -3$.

Ejercicio 12 Dada $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el método N-R generalizado consiste en realizar la iteración vectorial

$$x^{k+1} = x^k - (DF|_{x^k})^{-1}.F(x^k),$$

donde $(DF|_{x^k})^{-1}$ es la inversa de la matriz diferencial de F evaluada en x^k.

Usar la versión generalizada a varias variables del método N-R para para resolver el sistema de ecuaciones

$$2x - 3y = 0, \quad x^2 - y^2 - 3 = 0$$

comenzando con valores iniciales $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

Ejercicio 13 Aproximar la solución positiva de la ecuación $\cos(x) = 2x$, comenzando con $x_0 = 0.5$ y utilizando la iteración de punto fijo $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(x_n)$. Graficar con la sucesión obtenida.

Ejercicio 14 Sea $f(x) = x^3 - x - 1$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz en el intervalo $(1, 2)$. Se consideran las dos siguientes iteraciones del método de punto fijo para aproximar dicha raíz.

$$g(x) = x^3 - 1, \qquad h(x) = \sqrt[3]{x + 1}.$$

Determinar cuáles de estas funciones son apropiadas para la iteración, y para aquellas que lo sean:

a) Determinar un intervalo inicial I en el cual el método converja.

b) Dar un valor inicial $x_0 \in I$ y la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar la raíz de f con error menor que 10^{-5} comenzando con el x_0 dado.

Ejercicio 15 Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{8x - 1}{x} - e^x$.

a) Determinar, mediante gráficos convenientes, el número de raíces de f, localizando cada una de ellas entre dos enteros consecutivos.

b) Se proponen los siguientes dos métodos de punto fijo:

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}(1 + x_n e^{x_n}), \quad x_{n+1} = \ln\left(\frac{8x_n - 1}{x_n}\right)$$

ambos con $x_0 = 1$. Estudiar si estas sucesiones convergen hacia alguna de las raíces de f.

c) Implementar ambos métodos y utilizarlos para estimar las raíces de f.

Ejercicio 16 Sea g una función tal que g' es continua en $[s, b]$, donde s es un punto fijo de g. Si además, se verifica que $0 \leq g'(x) \leq K < 1$ para todo $x \in [s, b]$, mostrar que la iteración, comenzando con $x_0 \in [s, b]$, converge decrecientemente a s.

Ejercicio 17 Sea f una función C^1 en las condiciones del método N-R. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Mostrar que el método N-R es un método de punto fijo.

Ejercicio 18 Para f una función C^2 que tiene una raíz de orden 2 en r:

a) Demostrar que el método N-R converge sólo linealmente a r (Sugerencia: Notar que en este caso la g del ejercicio anterior no está definida para $x = r$, redefinirla como $g(r) = r$, probar la diferenciabilidad de g y demostrar que $g'(r) \neq 0$).

b) ¿Cuál es el orden de convergencia de la siguiente modificación?

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ejercicio 19 Sea $f(x) = 4x^3 - 3x + 1 = 0$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz doble. Aproximarla calculando las 10 primeras iteraciones de los métodos N-R y N-R con la modificación del ejercicio 18, comenzando con los valores iniciales $x_1 = y_1 = 25$. Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas.

Ejercicio 20 Dada la función $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$, $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz $r = 1$:

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$$

Verificar que si $x_0 > 1$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluir que $x_n \to 1$, aunque esta iteración no está en las hipótesis del teorema del punto fijo. ¿Qué hipótesis no se cumple?

Ejercicio 21 Se quiere resolver la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = e^x - 2$. Calcular los 10 primeros términos de las sucesiones generadas por los métodos N-R y de la secante, comenzando con los valores iniciales $x_1 = 3$ para el primer método e $y_1 = 3, y_2 = 2.3$ para el segundo. Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas.

Ejercicio 22 * Se quiere aplicar el método N-R para dar una tabla de valores de la función $y(x)$ definida implícitamente por la ecuación $G(x, y) = 0$ en un intervalo $[a, b]$.

El método consiste en comenzar la tabla en un par de valores x_0, y_0 que verifican $x_0 = a$ y $G(x_0, y_0) = 0$ y proceder por incrementos en x hasta llegar al valor $x_N = b$.

En cada paso se obtiene el valor de y_{n+1} aplicando el método N-R a la función $G(x_{n+1}, y)$ donde y es la variable y x_{n+1} permanece fijo; con valor inicial el valor de y_n obtenido en el paso anterior. Dado que la función $y(x)$ se supone continua, esta elección del valor inicial se supone apropiada.

a) Aplicar el método para la ecuación $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, comenzando en $x_0 = 0, y_0 = 1$ para valores de x en $[0, 1]$. Graficar junto con la solución que se obtiene de despejar analíticamente y comparar. Utilizar distintos valores para el incremento y para la cantidad de iteraciones del método N-R en cada paso.

b) Aplicar el método para $G(x, y) = 3x^7 + 2y^5 - x^3 + y^3 - 3$. Comenzar la tabla en $x_0 = 0, y_0 = 1$ y proceder por incrementos en x de 0.2 hasta llegar a $x_{50} = 10$.