Elementos de Cálculo Numérico (M) / Cálculo Numérico (F)

Segundo Parcial - 14 de Julio de 2014

Nombre y Apellido	**LU**	1	2	3	4	Nota

1. Sea $f(x) = \cos(\pi x)$.
   a) Calcular el polinomio de grado 3 que interpola a f en -1, 0 y 1, y a f' en -1. Observe que el polinomio no es una función par, pese a serlo f.
   b) Calcular el polinomio p de grado 4 que interpola a f como antes y, además, interpola a f' en 1. Verificar que este polinomio es par.
   c) Probar que el error que se comete al calcular $\cos(\frac{\pi}{4})$ utilizando p es menor que $\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \frac{15}{8}$.

2. Sean $V = \left\{ f \in C^1([-1,1]) : \int_{-1}^{1} f = 0 \right\}$, y $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por:

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f'(x) g'(x) dx$$

   a) Probar que $<,>$ es un producto interno en V.
   b) Dar una base ortonormal del subespacio $S \subset V$, $S = \text{gen}\left\{ x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 \right\}$.
   c) Hallar la función en S que mejor aproxima a $\cos(\pi x)$ en el sentido de cuadrados mínimos.

3. Considerar una fórmula de cuadratura dada por:

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1 - x^2) dx \sim A f(x_0) + B f(0) + A f(-x_0)$$

   a) Probar que una cuadratura de esta forma calcula de manera exacta las integrales correspondientes para **todos** los polinomios de la forma x^j con j impar.
   b) Hallar A, B y x_0 de manera tal que la cuadratura tenga el mayor grado de precisión posible. ¿Es una cuadratura gaussiana?
   c) Probar que el error que se comete al utilizar la cuadratura para calcular el valor de: $\int_{-1}^{1} -x^9 - x^8 + x^7 + x^6 dx$ es menor que $\frac{32}{49}$.

4. Considerar la ecuación diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & t^2 \cos(e^y), \quad t \in [0,1] \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. \tag{1}$$

   a) Probar que la solución satisface: $0 \leq y(t) \leq 2$, $\forall t \in [0,1]$.
   b) Escribir la iteración del método de Euler aplicado a (1), y acotar el error de truncado.
   c) Dar un valor del paso h que garantice que el error que comete método de Euler al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-4}.

Justifique todas sus respuestas.