

Elementos de Cálculo Numérico (M) / Cálculo Numérico (F)

Recuperatorio del Segundo Parcial - 21 de Julio de 2014

| Nombre y Apellido | LU | 1 | 2 | 3 | 4 | Nota |
|-------------------|----|---|---|---|---|------|
| | | | | | | |

1. Sean $f = \frac{1}{1+x}$ y $g(x) = 2^{ax^2+bx+c}$.

- a) Hallar a , b y c para que g interpole a f en los puntos: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$.
- b) Probar que con los valores del item anterior se tiene que:

$$2^{-\frac{1}{24\ln(2)}} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2^{\frac{1}{24\ln(2)}}$$

Sug.: Puede ser útil recordar que $\log_2(A) = \ln(A)/\ln(2)$.

2. Sea $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma dada por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)g(x)dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f'(x)g'(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f'(x)g'(x)dx$$

- a) Probar que \langle, \rangle es un producto interno en $V = \mathcal{C}^1([-1, 1])$.
- b) Dar una base ortonormal del subespacio $S \subset V$, $S = \text{gen}\{1, x\}$.
- c) Hallar la función en S que mejor aproxima a x^2 en el sentido de cuadrados mínimos.

3. Considerar una fórmula de cuadratura de la forma:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} dx \sim Af(x_0) + Af(-x_0)$$

- a) Calcular A y x_0 de manera tal que la cuadratura tenga el mayor grado de precisión posible.
- b) ¿Es esta una cuadratura gaussiana? ¿Por qué?
- c) Probar que el error que se comete al utilizar la cuadratura para calcular el valor de: $\int_{-1}^1 e^{2x}|x|^{-\frac{1}{2}} dx$ es menor que $\frac{128e^2}{27 \cdot 25}$.

4. Considerar la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y' &= \frac{1}{y^2+t}, & t > 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (1)$$

- a) Probar que la solución satisface $1 \leq y(t) \leq 1 + t, \forall t > 0$.
- b) Escribir la iteración del método de Euler aplicado a (1), y probar que el error de truncado en el paso i satisface: $\tau_i \leq \frac{3+2t_{i+1}}{2} h$
- c) Probar que el error que se comete al aplicar el método de Euler para calcular $y(T)$ es menor que $\frac{3+2T}{4} h(e^{2T} - 1)$

Justifique todas sus respuestas.