**Elementos de Cálculo Numérico (M) / Cálculo Numérico (F)**

Primer Parcial - 14 de Mayo de 2014

| Nombre y Apellido | LU | 1 | 2 | 3 | Nota |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

1. Sean
$$H_j = \begin{pmatrix} j & -j \\ j & j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad A_n = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & H_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$
   a) Probar que $Cond_\infty(A_n) \to \infty$, cuando $n \to \infty$.
   b) Calcular la descomposición en valores singulares y la descomposición QR de $A_n$.
   c) Calcular $Cond_2(A_n)$.
   d) Sea $P_n$ la matriz diagonal tal que $(P_n)_{ii} = \frac{1}{(A_n)_{ii}}$ ($P_n$ es el *precondicionador de Jacobi* para $A_n$). Probar que $Cond_2(P_nA_n) = 1$. ¿Cómo podría utilizarse esta información si se quiere resolver un sistema de la forma $A_nx = b$?

2. a) Dado el sistema $Ax = b$, con $A = M + N$, siendo $M$ inversible, considerar el método iterativo: $x_{n+1} = Bx_n + c$ donde $B = -M^{-1}N$ y $c = M^{-1}b$. Probar que los autovalores de $B$ son exactamente las raíces del polinomio: $\det(\lambda M + N)$.
   b) Probar que el método de Jacobi aplicado a
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
   no converge. ¿Qué sucede con el método de Gauss-Seidel?
   c) Sean $M = 2D + L$, $N = U - D$, con $D, L$ y $U$ las partes diagonal, inferior y superior de $A$. Probar que el método asociado a esta descomposición converge $\forall x_0$.

3. a) Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ con una raíz simple en $r$. Probar que si $f > 0$, $f' < 0$ y $f'' > 0$ en $(-\infty, r)$, entonces el método de Newton Raphson aplicado a $f$ con dato inicial $x_0 \in (-\infty, r)$ genera una sucesión creciente que converge a $r$.
   b) Sea $f(x) = e^{x-2} - e^2x + 8$.
      i) Probar que $f$ tiene sólo dos raíces: una de ellas, $r_1$, en el intervalo $[-4, 4]$, y la otra, $r_2$, en el intervalo $[4, 6]$.
      ii) Probar que para todo dato inicial $x_0 \in (-\infty, r_1]$ el método de Newton-Raphson da una sucesión creciente que converge a $r_1$. ¿Qué sucede si $x_0 \in (r_1, 4)$?
      iii) Sin hacer cuentas: ¿Qué podría decirse de la convergencia para $x_0 \in (4, \infty)$?
      iv) Proponer un método de punto fijo para hallar $r_1$, y dar un intervalo $I$ tal que el método propuesto converja para todo dato inicial en $I$.

**Justifique todas sus respuestas.**